ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
(УГНТУ)

Кафедра математики

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

дисциплины «Математика»

РАЗДЕЛ 4 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Теоретические основы
Методические указания для студентов
Материалы для самостоятельной работы студентов

Уфа • 2007

УДК 517.2(07)
ББК 22.161.1 я 7
У90

Ответственный редактор д. ф.-м. наук, проф. Р.Н. Бахтизин

Редколлегия:

АкмадиеваТ.Р., Аносова Е.П., Байрамгулова Р.С., Галиуллин М.М., Галиева Л.М., Галиакбарова Э.В., Гимаев Р.Г., Гудкова Е.В., Егорова Р.А., Жданова Т.Г., Зарипов Э.М., Зарипов Р.М., Исламгулова Г.Ф., Ковалева Э.А., Майский Р.А., Мухаметзянов И.З., Нагаева З.М., Савлучинская Н.М., Сахарова Л.А., Степанова М.Ф., Сокова И.А., Сулейманов И.Н., Умергалина Т.В., Фаткуллин Н.Ю., Хайбуллин Р.Я., Хакимов Д.К., Хакимова З.Р., Чернятьева М.Р., Юлдыбаев Л.Х., Шамшович В.Ф., Якубова Д.Ф., Якупов В.М., Янчушка А.П., Яфаров Ш.А.

Рецензенты: Кафедра программирования и вычислительной математики Башкирского государственного педагогического университета.
Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Р.М. Асадуллин.
Кафедра вычислительной математики Башкирского государственного университета.
Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Н.Д. Морозкин.

Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 4 «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов. – Уфа: Издательство УГНТУ, 2007. – 120 с.

Содержит теоретические материалы, способы и методы решения практических задач, задания для самостоятельной работы студентов, контрольные вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Разработан для студентов, обучающихся по всем формам обучения по направлениям подготовки и специальностям, реализуемым в УГНТУ.

УДК 517.2(07)
ББК 22.161.1 я 7

© Уфимский государственный нефтяной технический университет, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

1. Теоретические основы
1.1. Задача о скорости движения материальной точки 5
1.2. Определение производной. Механический и геометрический смысл производной 6
1.3. Дифференцируемость функции одной переменной 9
1.4. Основные правила дифференцирования 11
1.5. Производная сложной функции 12
1.6. Производная обратной функции 13
1.7. Неявная функция и ее дифференцирование 15
1.8. Производные основных элементарных функций 16
1.9. Таблица производных 18
1.10. Логарифмическое дифференцирование 19
1.11. Дифференцирование параметрически заданных функций 20
1.12. Производные высших порядков 21
1.13. Дифференциал функции 22
1.14. Основные теоремы дифференциального исчисления 26
1.15. Применение дифференциального исчисления 29
1.16. Монотонность функции (возрастание и убывание функции) 33
1.17. Экстремум функции 35
1.18. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке 38
1.19. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба 38
1.20. Асимптоты графика функции 41
1.21. Общая схема исследования функции и построения графиков 42
1.22. Формула Тейлора 44
2. Методические указания для студентов
2.1. Понятие производной 49
2.2. Производная неявно заданной функции. Логарифмическая производная 51
2.3. Дифференцирование функций заданных параметрически 54
2.4. Приложения производной к задачам геометрии и механики 56
2.5. Дифференциал функции 59
2.6. Производные и дифференциалы высших порядков 61
2.7. Правило Лопиталя 63
2.8. Формула Тейлора 66
2.9. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке 68
2.10. Общая схема исследования функции и построение её графика 70
3. Материалы для самостоятельной работы студентов
3.1. Контрольные вопросы 77
3.2. Задачи и упражнения для самостоятельной работы 78
3.3. Расчетные задания 97
3.4. Литература 120

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 4 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1. Теоретические основы

1.1. ЗАДАЧА О СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пусть материальная точка (некоторое тело) M движется по некоторой прямой. Расстояние s движущейся точки, отсчитываемое от некоторого начального ее положения M_0, будет зависеть от времени t, то есть $s = s(t)$.

Если в некоторый момент времени t движущаяся точка M находилась на расстоянии s от начального положения, то в момент времени $t + \Delta t$ точка займет положение M_1 – на расстоянии $s + \Delta s$ от начального положения (рис. 1.1).

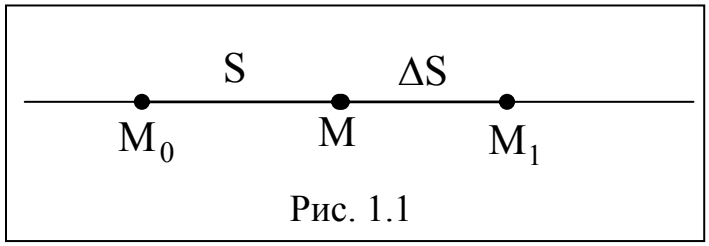


Рис. 1.1

Здесь $M_0M_1 = s + \Delta s$,
где $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) -$ перемещение точки M за время Δt.

Тогда средняя скорость движения точки за время Δt равна

$$V_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Средняя скорость зависит от Δt, и чем меньше Δt, тем точнее она выражает скорость движения точки M в данный момент времени t. Наиболее полно характеризует скорость движения точки M в момент времени t тот предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$. Этот предел и называют ***скоростью движения точки в данный момент*** времени (или мгновенной скоростью):

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ или } V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Таким образом, мы видим, что понятие скорости неравномерного движения связано с понятием предела.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. МЕХАНИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором промежутке (a, b). Аргументу x дадим приращение Δx (положительное или отрицательное – безразлично), причем так, чтобы значение $x + \Delta x \in (a, b)$. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Если этот предел существует, то его называют ***производной*** данной функции $f(x)$ и обозначают $f'(x)$ или y' или $\frac{dy}{dx}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Итак, по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции $f(x)$, вычисленная в некоторой фиксированной точке x_0, равна

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

ПРИМЕР 1.1. Найти производную функции $y = C$, где $C -$ постоянное число.

Решение: Очевидно, что областью определения этой функции является вся числовая прямая R. Поэтому рассмотрим любую точку $x \in R$ и дадим ей приращение Δx. Функция получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0.$$

Значит $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$, следовательно $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$, то есть $(C)' = 0$.

ПРИМЕР 1.2. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение: Возьмем произвольное $x \in D(y) = R$ и дадим ей приращение Δx. Функция получит приращение $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$ $= x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. Тогда $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x + 0 = 2x$.

Таким образом, $(x^2)' = 2x$.

ПРИМЕР 1.3. Найти производные функций $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись первым замечательным пределом, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x,$$ то есть

или $(\sin x)' = \cos x$.

Проделав аналогичные операции, получим формулу $(\cos x)' = -\sin x$.

Возвращаясь к предыдущей задаче о скорости прямолинейного движения, получим $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$, то есть скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равна производной от пути s по времени t. В этом заключается ***механический смысл производной.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1.2. ***Касательной*** M_0P к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 будем называть предельное положение секущей M_0M при

$\Delta x \to 0$ или, что тоже самое $M_0 \to M$ (если такое положение существует) (рис. 2.1).

Теперь выясним геометрический смысл производной. Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$ (рис. 1.2).

Здесь предполагается, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ график функции имеет невертикальную касательную.

Очевидно, что угловой коэффициент секущей M_0M равен

$$k_{сек} = \operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

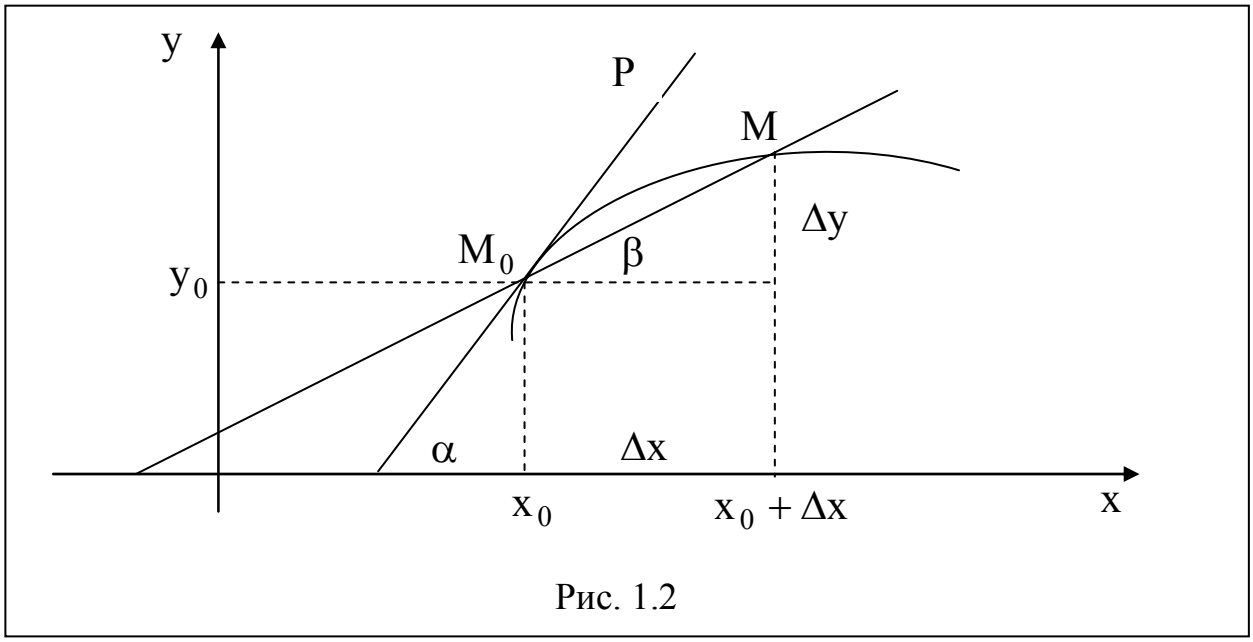


Рис. 1.2

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремится к нулю, поэтому точка M неограниченно приближается по кривой к точке M_0, а секущая M_0M переходит в касательную. При этом угол $\beta \to \alpha$, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$. Поэтому угловой коэффициент касательной равен $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x_0)$, то есть $k = f'(x_0)$.

Таким образом, значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно ***угловому коэффициенту касательной*** к графику функции в точке, абсцисса которой равна x_0. В этом заключается ***геометрический смысл производной.***

Пользуясь уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным угловым коэффициентом $k = f'(x_0)$, можно записать уравнение касательной:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой.***

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент k_1 равен

$$k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Тогда уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \ (\text{если } f'(x_0) \neq 0).$$

Если $f'(x_0) = 0$, то уравнение касательной есть прямая $y = y_0$, а уравнение нормали $x = x_0$.

ПРИМЕР 1.4. Найти уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^2$ в точке $M_0(1,1)$.

Решение. Имеем $x_0 = 1$, $f'(x) = 2x$, тогда $y_0 = f(x_0) = f(1) = 1^2 = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Следовательно, уравнение касательной: $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$, а уравнение нормали: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

1.3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

Если функция $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет производную, то говорят, что в этой точке ***функция дифференцируема***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке некоторого интервала (a, b), называется ***дифференцируемой*** в этом интервале.

Операцию нахождения производной функции называют ***дифференцированием функции.***

Теорема 1.1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$. Тогда существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Отсюда, по теореме о связи функции с ее пределом, имеем

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$. Следовательно,

$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$. Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = f'(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Обратное утверждение теоремы неверно, то есть из того, что функция $y = f(x)$ в какой-нибудь точке $x = x_0$ непрерывна, еще не следует, что в этой точке она дифференцируема. Примером такой функции является функция

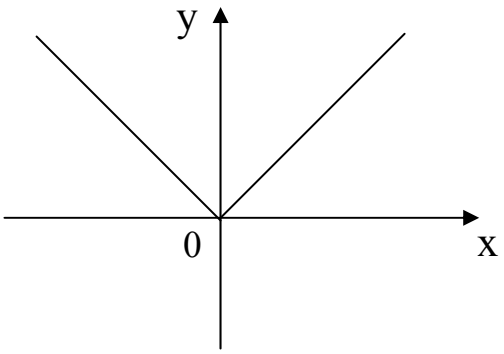


Рис. 1.3

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

На рисунке 1.3 видно, что в точке $x = 0$ функция непрерывна, однако в этой точке она не дифференцируема.

Действительно, в точке $x = 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, то есть функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ не имеет производной.

1.4. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Теорема 1.2. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемы в точке x. Тогда:

1. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

2. Производная произведения двух функций равна:

$$(u \cdot v)' = u'v + u\,v'$$

3. Производная частного двух функций равна:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ если } v(x) \neq 0.$$

Доказательство. 1.Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функции $u(x)$ и $v(x)$ получат приращения Δu и Δv, а функция $y = u + v$ получит приращение

$$\Delta y = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] =$$
$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v.$$

Следовательно,

$$y' = (u + v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

то есть $(u + v)' = u' + v'$.

Аналогичным образом доказывается, что $(u - v)' = u' - v'$.

Теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

2. Пусть $y = u\,v$. Тогда $\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)$. Так как $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$, то $u(x + \Delta x) = \Delta u + u(x)$, $v(x + \Delta x) = \Delta v + v(x)$.

Поэтому $\Delta y = (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) = u(x)v(x) +$
$+ \Delta u\,v(x) + \Delta v\,u(x) + \Delta u\,\Delta v - u(x)v(x) = v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\,\Delta v$.

Разделив обе части данного равенства на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$y' = (u\,v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v =$$
$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + u'(x)\cdot 0 = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

то есть

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'.$$

При доказательстве мы использовали теорему 1.2 (о связи между непрерывностью и дифференцируемостью), согласно которой $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$.

Утверждение п.3 доказывается аналогично, предлагаем это выполнить самостоятельно.

ПРИМЕР 1.5. Найти производные функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

Решение. Воспользуемся формулой производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ т.е. } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогичным образом получим формулу

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

1.5. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ является сложной функцией переменной x, а переменную u называют ***промежуточным аргументом.***

Теорема 1.3. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u'_x = \varphi'(x)$, а функция $y = f(u)$ имеет в соответствующей точке $u = \varphi(x)$ производную $y'_u = f'(u)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ в указанной точке x также имеет производную, которая находится по формуле

$y' = f'(u)\cdot\varphi'(x)$ или, коротко,

$$y' = y'_u \cdot u'_x. \qquad (1.1)$$

Доказательство. По условию $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$. Отсюда, по теореме о связи функции с ее пределом, имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u+\alpha$ или

$$\Delta y=y'_u\cdot\Delta u+\alpha\cdot\Delta u, \tag{1.2}$$

где $\alpha-$ б.м.ф. ($\alpha\to 0$ при $\Delta u\to 0$).

Функция $u=\varphi(x)$ имеет производную в точке x, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x$, поэтому

$$\Delta u=u'_x\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta x, \tag{1.3}$$

где $\beta-$ б.м.ф. ($\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$).

Подставив (1.3) в равенство (1.2), получим

$$\Delta y=y'_u\cdot u'_x\cdot\Delta x+y'_u\cdot\beta\cdot\Delta x+\alpha\cdot u'_x\cdot\Delta x+\alpha\cdot\beta\cdot\Delta x \tag{1.4}$$

Разделив полученное равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим

$$y'=y'_u\cdot u'_x.$$

ПРИМЕР 1.6. Найти производную функции $y=\sin x^2$.

Решение: Представим функцию как сложную, введя промежуточный аргумент u: $y=\sin u$, где $u=x^2$. Тогда $y'_u=\cos u,\ u'_x=2x$ и, следовательно, $y'=y'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot 2x=\cos x^2\cdot 2x$.

1.6. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y=f(x)$ строго монотонна в интервале (a,b), тогда для нее существует обратная функция $x=\varphi(y)$.

Теорема 1.4. Если функция $y=f(x)$ в некоторой точке x имеет отличную от нуля производную $f'(x)$, то обратная ей функция $x=\varphi(y)$ в соответствующей точке y также имеет производную $\varphi'(y)$, равную

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} \tag{1.5}$$

Доказательство. Рассмотрим обратную функцию $x=\varphi(y)$. Дадим аргументу y приращение $\Delta y\neq 0$, тогда функция получит приращение Δx, причем $\Delta x\neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y=f(x)$. Поэтому можно записать тождество

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{1.6}$$

Если $\Delta y\to 0$, то в силу непрерывности обратной функции имеем $\Delta x\to 0$. И так как по условию теоремы $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\neq 0$, то из равенства (1.6) следует $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}$, то есть $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$.

Правило дифференцирования обратной функции иногда записывается так:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}\ \text{или}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \tag{1.7}$$

ПРИМЕР 1.7. Найти производные обратных тригонометрических функций $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Решение. Пусть $y=\arcsin x$. Обратная ей функция имеет вид $x=\sin y$, где $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. В интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ имеем $x'=\cos y\neq 0$. Тогда по правилу дифференцирования обратной функции

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

где перед корнем взят знак +, так как $\cos y>0$ при $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Итак, $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично получаем $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$. Она является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{\left(\operatorname{tg} y\right)'} = \cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$, то есть $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Аналогичным образом находим $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

1.7. НЕЯВНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y, то говорят, что функция задана в явном виде.

Под ***неявным заданием*** функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x, y) = 0$, не разрешенного относительно y.

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $y - f(x) = 0$, но не наоборот.

Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительно y, например, $y + 2xy^2 - \sin y + 5 = 0$ или $3^y + 2x + 4y = 0$.

Если неявная функция задана уравнением $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной от y по x необходимо продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию от x, и затем

полученное уравнение разрешить относительно y'.

ПРИМЕР 1.8. Найти производную функции y, заданную уравнением $y^5 - 3xy^2 + 4xy + x^3 = 0$.

Решение: Функция y задана неявно. Дифференцируя обе части этого тождества по x, считая, что y есть функция от x и, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получим

$$\left(y^5\right)' - 3 \cdot \left(x \cdot y^2\right)' + 4\left(x \cdot y\right)' + \left(x^3\right)' = 0$$
$$5y^4 \cdot y' - 3y^2 - 6xyy' + 4y + 4xy' + 3x^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(5y^4 - 6xy + 4x\right)y' = 3y^2 - 4y - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3y^2 - 4y - 3x^2}{5y^4 - 6xy + 4x}.$$

1.8. ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1.8.1. Логарифмическая функция $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$

Имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\log_a \dfrac{x + \Delta x}{x} =$

$$= \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \left|\begin{array}{l}\dfrac{\Delta x}{x} = \alpha,\ \Delta x = \alpha \cdot x \\ \Delta x \to 0 \ \Rightarrow \ \alpha \to 0\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha x}} = \lim_{\alpha \to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x}\lim_{\alpha \to 0}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$= \dfrac{1}{x}\log_a e$, то есть $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$.

Здесь воспользовались вторым замечательным пределом. Если $a = e$, то $\log_e x = \ln x$ и $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

1.8.2. Показательная функция $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$

Логарифмируя равенство $y = a^x$, получим $\ln y = x \ln a$. Дифференцируя полученное равенство по переменной x по правилу дифференцирования неявной функции, получим $\dfrac{1}{y} \cdot y' = \ln a \ \Rightarrow \ y' = y \ln a$ или $y' = a^x \ln a$. Итак, $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.

Если основание $a = e$, то $\ln e = 1$ и мы получим формулу $\left(e^x\right)' = e^x$.

ПРИМЕР 1.9. Найти производную функции $y = \ln\left(e^x - x^5 + 1\right)$.

Решение: $y' = \dfrac{1}{e^x - x^5 + 1} \cdot \left(e^x - x^5 + 1\right)' = \dfrac{e^x - 5x^4}{e^x - x^5 + 1}$.

1.8.3. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$

Логарифмируя равенство $y = x^{\alpha}$, получим $\ln y = \alpha \ln x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \alpha \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha \cdot \frac{y}{x} = \alpha \cdot \frac{x^{\alpha}}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ то есть } \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Отметим, что производные тригонометрических и обратно тригонометрических функций были нами рассмотрены ранее.

1.8.4. Производные гиперболических функций

Гиперболические функции определяются следующими формулами:

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус;

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус;

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ – гиперболический тангенс и котангенс.

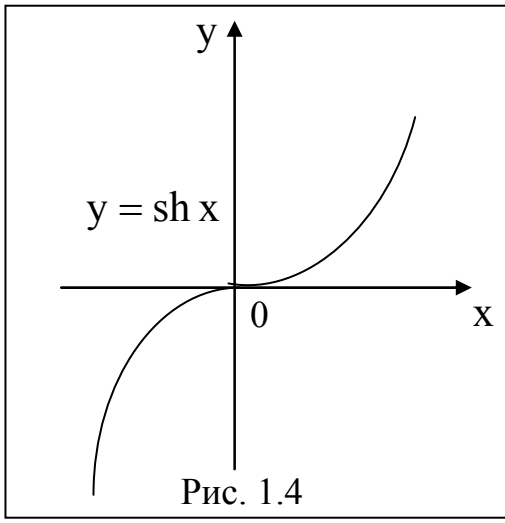


Рис. 1.4

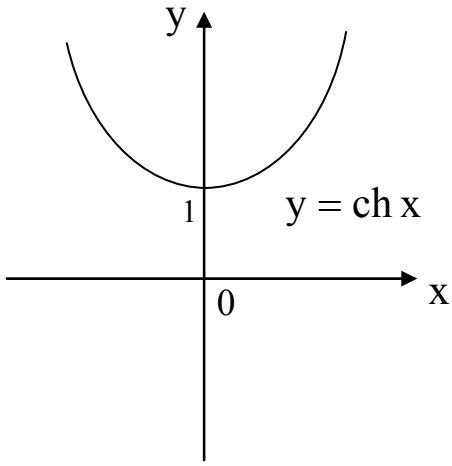


Рис. 1.5

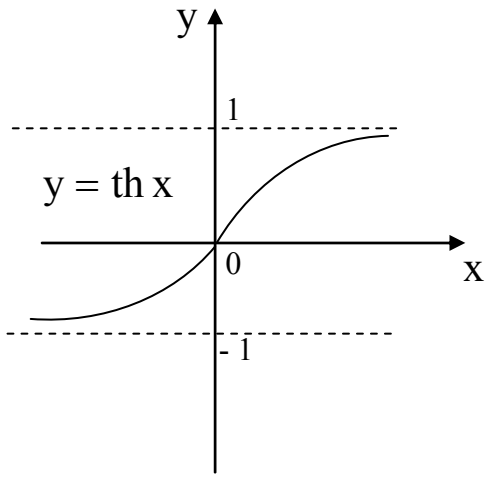


Рис. 1.6

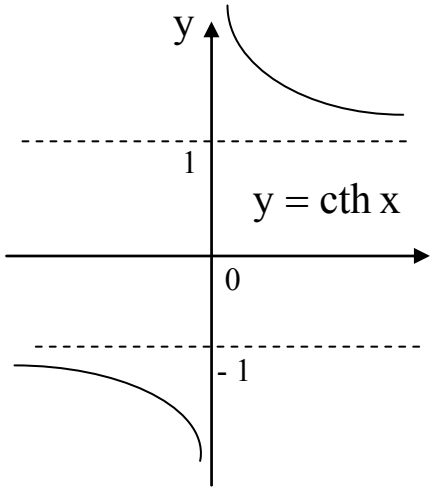


Рис. 1.7

Найдем производные этих функций

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \text{ то есть } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \text{ то есть } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

то есть $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \cdot (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad \text{то}$$

есть $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

В последних двух формулах мы воспользовались зависимостью $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, которая легко получается из определения гиперболических функций.

1.9. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;
4. $y' = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ (дифференцирование сложной функции);
5. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ (дифференцирование обратной функции).

Формулы дифференцирования

1. $(C)' = 0;$
2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1};$
3. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a;$
4. $\left(e^{x}\right)' = e^{x};$
5. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a};$
6. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x};$
7. $\left(\sin x\right)' = \cos x;$
8. $\left(\cos x\right)' = -\sin x;$
9. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
10. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$
11. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
12. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
13. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2};$
14. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2};$
15. $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x;$
16. $\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x;$
17. $\left(\operatorname{th} x\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$
18. $\left(\operatorname{cth} x\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

1.10. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют ***логарифмическим дифференцированием.***

ПРИМЕР 1.10. Найти производную функции $y = \dfrac{\left(x^3-3\right)\sqrt{(x+2)^3}}{e^{x^2}\,(2x+4)^5}$.

Решение: Логарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln\left(x^3-3\right) + \frac{3}{2}\ln(x+2) - x^2 - 5\ln(2x+4).$$

Дифференцируя это равенство по x, получим

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3x^2}{x^3-3} + \frac{3}{2(x+2)} - 2x - \frac{10}{2x+4} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = y\left(\frac{3x^2}{x^3-3} + \frac{3}{2(x+2)} - 2x - \frac{10}{2x+4}\right) \text{ или}$$

$$y' = \frac{\left(x^3 - 3\right)\sqrt{(x+2)^3}}{e^{x^2}(2x+4)^5}\left(\frac{3x^2}{x^3-3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)} - 2x - \frac{10}{2x+4}\right).$$

На практике встречаются функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая ***степенно-показательная функция*** $y = [u(x)]^{v(x)}$.

Найдем производную, предварительно логарифмируя:

$$\ln y = v(x)\ln u(x) \Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x) \Rightarrow$$

$$y' = [u(x)]^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x)\right) \text{ или}$$

$$\left(u^v\right)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1}\cdot u'.$$

ПРИМЕР 1.11. Найти производную функции $y = (\cos 3x)^{x^4+2x}$.

Решение. Пользуясь полученной формулой, получаем

$$y' = (\cos 3x)^{x^4+2x}\cdot\ln\cos 3x\cdot\left(4x^3+2\right) +$$

$$+\left(x^4+2x\right)\cdot(\cos 3x)^{x^4+2x-1}\cdot(-\sin 3x)\cdot 3.$$

На практике пользоваться готовой формулой нежелательно, а необходимо всю процедуру логарифмирования и затем дифференцирования повторить.

1.11. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{1.8}$$

где $t-$ вспомогательная переменная, называемая параметром.

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные и что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \theta(x)$, которая также имеет производную. Тогда определенную параметрическими уравнениями (1.8) функцию $y = f(x)$ можно рассматривать как сложную функцию $y = \psi(t),\ t = \theta(x),\ t-$ промежуточный аргумент.

По правилу дифференцирования сложной функции получим

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'_t(t) \cdot \theta'_x(x) \qquad (1.9)$$

На основании теоремы о дифференцировании обратной функции следует $\theta'_x(x) = \dfrac{1}{\varphi'_t(t)}$. Подставляя последнее выражение в равенство (1.9), получаем

$$y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)} \text{ или } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (1.10)$$

Полученная формула позволяет находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

ПРИМЕР 1.12. Функция y от x задана параметрически уравнениями $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$. Найти производную y'_x.

Решение. $y'_x = \dfrac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t} = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$.

ПРИМЕР 1.13. Найти угловой коэффициент касательной к циклоиде $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ в точке, соответствующей значению параметра $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение: Угловой коэффициент касательной в точке равен значению производной y'_x в этой точке, то есть равен $y'_x(t_0) = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$.

Имеем $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a\sin t$, следовательно,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \Rightarrow y'_x(t_0) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Значит, угловой коэффициент касательной к циклоиде в точке, соответствующей значению $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ равен 1.

1.12. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Значения производной $f'(x)$, вообще говоря, зависят от x, то есть производная $f'(x)$

представляет собой тоже функцию от x. Дифференцируя эту функцию, мы получаем так называемую вторую производную от функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Производная от первой производной называется ***производной второго порядка*** и обозначается символом y'', $f''(x)$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется ***производной третьего порядка*** и обозначается y''', $f'''(x)$ или $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Производной $n-$***го порядка*** от функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)-$го порядка: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Производные порядка выше первого называют ***производными высших порядков.***

ПРИМЕР 1.14. Дана функция $y = e^{kx}$ $(k = \text{const})$.

Найти выражение ее производной любого порядка.

Решение: $y' = k\,e^{kx}$, $y'' = k^2\,e^{kx}$, $y''' = k^3\,e^{kx}$,…, $y^{(n)} = k^n\,e^{kx}$.

ПРИМЕР 1.15. $y = \sin x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение: $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 3\right),$$

$$y^{IV} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 4\right),$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

1.13. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Производная этой функции в некоторой точке x этого отрезка определяется равенством $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Тогда, по теореме о связи функции с ее пределом, можно за-

писать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$, где $\alpha -$ б.м.ф., то есть $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Из последнего равенства имеем

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x . \qquad (1.11)$$

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x) \cdot \Delta x$ и $\alpha \cdot \Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое есть б.м.ф. одного порядка с Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а второе слагаемое есть б.м.ф. более высокого порядка, чем Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Поэтому первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ называют ***главной частью приращения функции.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная линейная относительно Δx часть ее приращения. Обозначается дифференциал через dy или $d\,f(x)$.

Таким образом, дифференциал равен произведению производной $f'(x)$ на приращение аргумента Δx:

$$dy = f'(x)\Delta x . \qquad (1.12)$$

Найдем дифференциал функции $y = x$. В этом случае $y' = x' = 1$, и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$ или $dx = \Delta x$. Поэтому формулу (1.12) можно записать

$$dy = f'(x)dx . \qquad (1.13)$$

Из этого соотношения следует, что $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Поэтому производную можно рассматривать как отношение дифференциала этой функции к дифференциалу независимой переменной.

ПРИМЕР 1.16. Найти дифференциал функции $y = 3x^5 - \ln(x^2 + 1)$.

Решение: По формуле (1.13) находим

$$dy = \left(3x^5 - \ln(x^2 + 1)\right)' dx = \left(15x^4 - \frac{2x}{x^2 + 1}\right)dx .$$

Приближенное вычисление значения функции с помощью дифференциала

Вернемся к выражению (1.11), которое с учетом (1.12) можно записать так:

$$\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x. \tag{1.14}$$

Отбрасывая бесконечно малую $\alpha \cdot \Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получаем приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy, \tag{1.15}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} &f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\cdot \Delta x \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot \Delta x. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Формула (1.16) используется в приближенных вычислениях.

ПРИМЕР 1.17. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1{,}07$.

Решение. Для функции $f(x)=\operatorname{arctg} x$ формула (1.16) примет вид

$$\operatorname{arctg}(x+\Delta x)\approx \operatorname{arctg} x+(\operatorname{arctg} x)'\,\Delta x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(x+\Delta x)\approx \operatorname{arctg} x+\frac{\Delta x}{1+x^2}.$$

Так как $x+\Delta x=1{,}07$, то, полагая $x=1$ и $\Delta x=0{,}07$, получаем

$$\operatorname{arctg} 1{,}07 \approx \operatorname{arctg} 1+\frac{0{,}07}{1+1}=\frac{\pi}{4}+0{,}035\approx 0{,}82.$$

ПРИМЕР 1.18. Вычислить $\sin 31^0$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x$. Для нее запишем формулу (1.16): $\sin(x+\Delta x)\approx \sin x+\cos x\cdot \Delta x$. Полагая $x=30^0, \Delta x=1^0=\frac{\pi}{180}$ рад $\approx 0{,}017$, получим

$$\sin 31^0 \approx \sin 30^0+\cos 30^0\cdot 0{,}017=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}017\approx 0{,}515.$$

Пусть имеем функцию $y=f(x)$, где $x-$ независимая переменная. Дифференциал этой функции $dy=f'(x)dx$ есть функция от x. Здесь от x зависит $f'(x)$, второй множитель (dx) не зависит от x.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Дифференциал от дифференциала функции называется **вторым дифференциалом** или **дифференциалом второго порядка** этой функции и обозначается $d^2y = d(dy)$.

Найдем выражение второго дифференциала. В силу общего определения дифференциала функции имеем:

$$d(dy) = (f'(x)dx)' \cdot dx.$$

Так как dx не зависит от x, то dx выносим за знак производной:

$$d(dy) = f''(x) \cdot (dx)^2.$$

Принято записывать степень дифференциала, опускать скобки:

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Дифференциалом $n-$го порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)-$го порядка:

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right) = \left(f^{(n-1)}(x) \cdot dx^{n-1}\right)' \cdot dx$$

или

$$d^n y = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$$

Пользуясь дифференциалами различных порядков, можно представить производную любого порядка как отношение дифференциалов соответствующих порядков:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx};\ f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2};\ldots;\ f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

ПРИМЕР 1.19. Пусть $y = x^4$. Тогда $dy = 4x^3\,dx$,

$$d^2y = d(dy) = \left(4x^3 dx\right)' = \left(4x^3\right)' \cdot (dx)^2 = 12x^2 (dx)^2.$$

ПРИМЕР 1.20. Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = r \cdot \cos t, \\ y = r \cdot \sin t, \end{cases} 0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Поскольку $x = x(t),\ \Rightarrow\ dx = x'(t) \cdot dt;\ y = y(t),\ \Rightarrow\ dy = y'(t) \cdot dt.$

Имеем $dx = -r \cdot \sin t\, dt,\ dy = r \cdot \cos t\, dt.$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r \cdot \cos t \cdot dt}{-r \cdot \sin t \cdot dt} = -\operatorname{ctg} t, \text{ т.е. } y' = \varphi(t).$$

$$d(y') = -(\operatorname{ctg} t)' \cdot dt = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot dt,$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t} \cdot dt}{-r \cdot \sin t \cdot dt} = -\frac{1}{r \cdot \sin^3 t}.$$

1.14. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теорема 1.5 (Ролля). Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. непрерывна на отрезке $[a; b]$,

2. дифференцируема в интервале $(a; b)$,

3. на концах отрезка принимает одинаковые значения: $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка $[a, b]$ найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке достигает своего наибольшего M и наименьшего m значений.

Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a, b]$ и, следовательно, ее производная $f'(x) = 0$ в любой точке отрезка $[a, b]$.

Если $M \neq m$, то функция достигает хотя бы одно из значений M или m во внутренней точке $c \in (a, b)$, так как $f(a) = f(b)$.

Пусть, например, значение M функция принимает в точке $c \in (a, b)$, то есть $f(c) = M$. Тогда для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(c). \tag{1.17}$$

Производная $f'(x)$ в точке c равна

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \tag{1.18}$$

В силу (1.17) верно неравенство $f(c+\Delta x)-f(c)\le 0$. Поэтому, если $\Delta x>0$ (то есть $\Delta x\to 0+$), то

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0$$

и, следовательно,

$$f'_{+}(c)\le 0. \tag{1.19}$$

Если же $\Delta x<0$, (то есть $\Delta x\to 0-$), то

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0$$

и, следовательно,

$$f'_{-}(c)\ge 0. \tag{1.20}$$

Так как по условию функция дифференцируема в интервале (a,b), то $f'_{-}(c)=f'_{+}(c)=f'(c)$. Отсюда, с учетом (1.19) и (1.20), получаем $f'(c)=0$.

В случае, когда $f'(c)=m$, доказательство аналогичное.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y=f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси $0x$ (рис. 1.8).

Теорема 1.6 (Лагранжа). Если функция $y=f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a,b]$,

2. дифференцируема в интервале (a,b), то найдется хотя бы одна точка $c\in(a,b)$ такая, что

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad c\in(a,b). \tag{1.21}$$

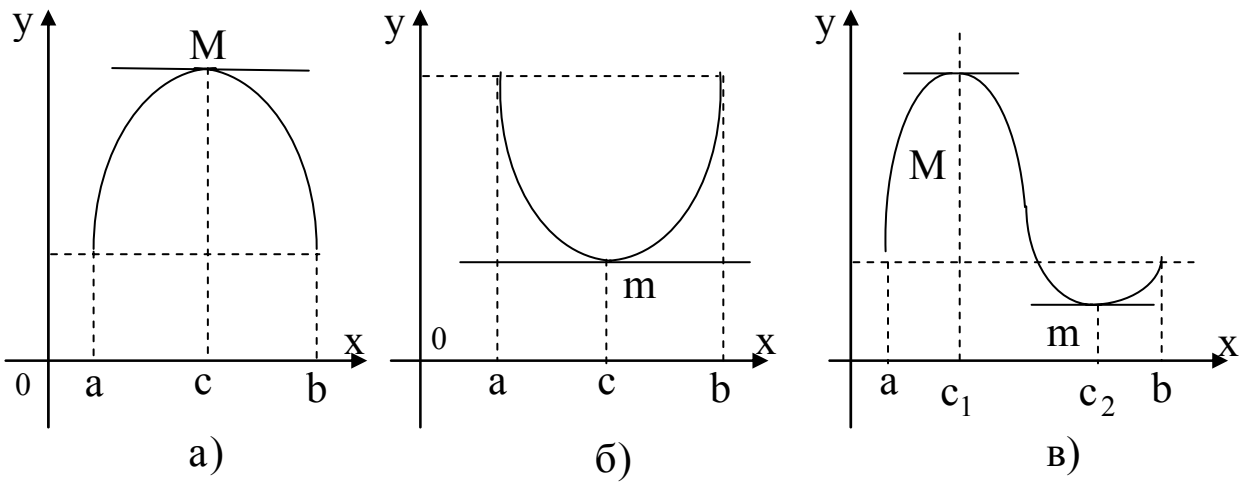


Рис. 1.8

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля (предлагаем проверить это самостоятельно). Тогда найдется точка $c \in (a, b)$, в которой $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, следовательно,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$ ч.т.д.

Из равенства (1.21) имеем

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{1.22}$$

Полученную формулу называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой о конечном приращении.***

Формуле Лагранжа можно придать другой вид. Применив теорему Лагранжа к отрезку $[x; x + \Delta x]$ $(\Delta x > 0)$, получим

$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x$, $c \in (x, x + \Delta x)$ или

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x)\Delta x, \tag{1.23}$$

где $0 < \theta < 1$.

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл (рис.1.9). Отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент секущей AB, а $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой $x=c$. Следовательно, на графике функции $y=f(x)$ найдется точка $C(c;f(c))$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB.

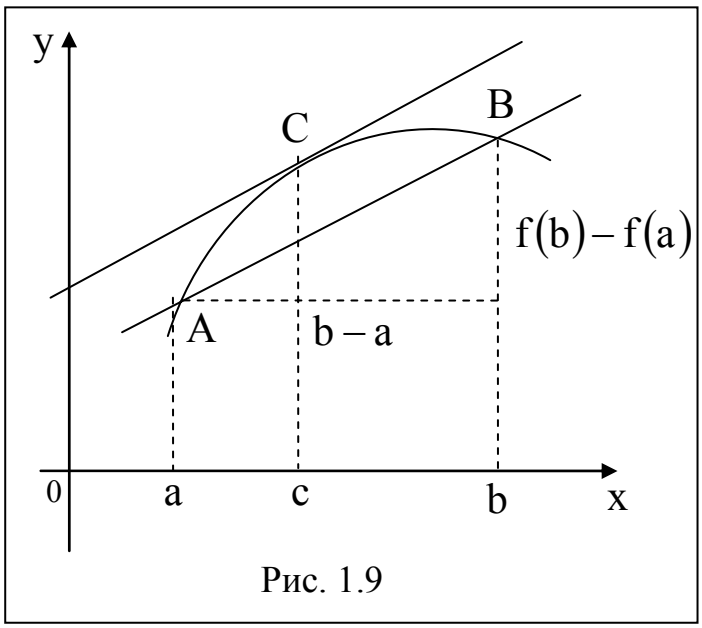


Рис. 1.9

Теорема 1.7 (Коши). Если функции $f(x)$ и $g(x)$

1. непрерывны на отрезке $[a,b]$,

2. дифференцируемы в интервале (a,b), причем $g'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$, то найдется хотя бы одна точка $c\in(a,b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{1.24}$$

Теорема доказывается аналогично теореме Лагранжа. Для этого достаточно рассмотреть вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Теорема 1.8 (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и некоторой точке x_0 этого интервала имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке x_0 существует производная, то она равна 0, то есть $f'(x_0)=0$.

1.15. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.15.1. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$, который основан на применении производных и называется правилом Лопиталя.

Теорема 1.9 (**раскрытие неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$**).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0)=g(x_0)=0$. Пусть $g'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Применим к функциям $f(x)$ и $g(x)$ теорему Коши для отрезка $[x_0;x]$ ($[x;x_0]$), лежащего в окрестности точки x_0. Тогда

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, где c лежит между x_0 и x.

Учитывая, что $f(x_0)=g(x_0)=0$, получаем

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{1.25}$$

При $x\to x_0$ величина c также стремится к x_0. Перейдя в равенстве (1.25) к пределу, получим $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, ч.т.д.

Замечание. Теорема верна и в случае, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ не определены при $x=x_0$, но $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

Замечание. Если $f'(x_0)=\varphi'(x_0)=0$ и производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы, то применяя правило Лопиталя повторно, получим $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ и т.д.

Замечание. Теорема справедлива и в том случае, когда $x\to\infty$.

ПРИМЕР 1.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{2x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(1-3x))'}{(2x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3}{2(1-3x)}=-\dfrac{3}{2}$.

ПРИМЕР 1.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(1-\cos x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$. Здесь три раза пришлось применить правило Лопиталя.

Теорема 1.10. (**раскрытие неопределенностей вида** $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, быть может, точки x_0) и пусть в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1.26}$$

Замечание. Теорема остается в силе и в случае, когда $x\to\infty$.

Замечание. Равенство (1.26) справедливо только в том случае, если предел, стоящий справа (конечный или бесконечный), существует. Может случиться, что предел, стоящий слева, существует, в то время как предел справа не существует.

ПРИМЕР 1.23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=$

$=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{3}\dfrac{6\cos 3x\sin 3x}{2\cos x\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sin 3x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}=\dfrac{-3}{1}\cdot\dfrac{-1}{1}=3.$

ПРИМЕР 1.24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n\,x^{n-1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)\ldots1}{e^x}=0.$

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Но на практике встречаются неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0. Эти неопределенности путем элементарных преобразований можно свести к неопределенностям вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

1. Неопределенность $|0\cdot\infty|$. Пусть $f(x)\to0$, $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\left|\frac{0}{0}\right|$$

или

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$$

ПРИМЕР 1.25. $\lim\limits_{x\to2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\cdot(2-x)=|\infty\cdot0|=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4}}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(2-x)'}{\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}x\right)'}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{4}}\cdot\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{4}{\pi}.$

2. Неопределенность $|\infty-\infty|$. Пусть $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

ПРИМЕР 1.26. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)=|\infty-\infty|=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\ln x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}(-x)=-1.$$

3. Неопределенности $|1^\infty|,\ |0^0|,\ |\infty^0|$. Пусть $f(x)\to1$ и $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, или $f(x)\to0$ и $g(x)\to0$ при $x\to x_0$, или $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to0$ при $x\to x_0$.

Необходимо вычислить $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}$. Используя основное логарифмическое тождество, получим

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\cdot\ln f(x)}.$$

ПРИМЕР 1.27. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}=|\infty^0|=\lim\limits_{x\to0}x^{-\operatorname{tg}x}=|0^0|=$

$$=\lim_{x\to0}e^{-\operatorname{tg}x\ln x}=e^{-\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}x\cdot\ln x}=|0\cdot\infty|=e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg}x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x}=e^{1\cdot0}=1.$$

1.16. МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ (ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ)

Теорема 1.11. (необходимые условия)

Если дифференцируемая в интервале (a,b) функция $y=f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x)\ge0$ $(f'(x)\le0)$ для $\forall\ x\in(a,b)$.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ возрастает в интервале (a,b). Возьмем произвольные точки x и $x+\Delta x\in(a,b)$ и рассмотрим отношение

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Так как функция возрастает, то при $\Delta x > 0$ $f(x+\Delta x) > f(x)$, если же $\Delta x < 0$, то $f(x+\Delta x) < f(x)$. В обоих случаях числитель и знаменатель дроби имеют одинаковые знаки, поэтому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$. По условию теоремы функция $f(x)$ имеет производную и, следовательно,

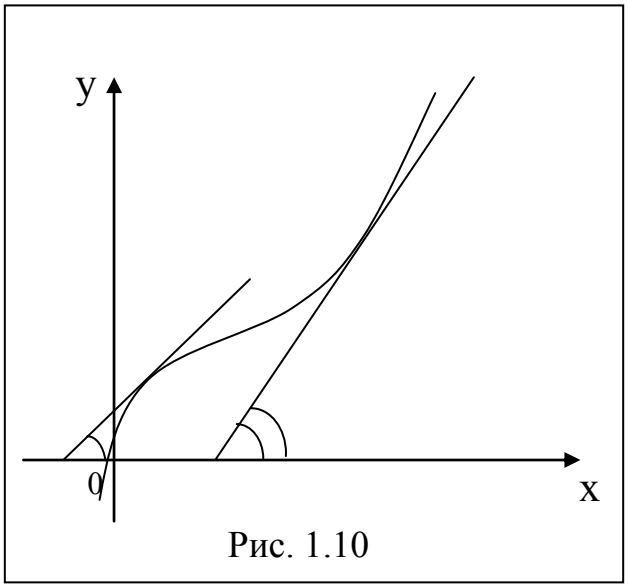


Рис. 1.10

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Аналогично рассматривается случай, когда функция $f(x)$ убывает в интервале (a,b).

Геометрически теорема 1.10 означает, что касательные к графику возрастающей функции образуют острые углы с положительным направлением оси $0x$ или в некоторых точках параллельны оси $0x$ (рис. 1.10).

Теорема 1.12 (достаточные условия). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале (a,b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для $\forall x \in (a,b)$, то эта функция возрастает (убывает) в интервале (a,b).

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$. Возьмем произвольные точки x_1 и $x_2 \in (a,b)$, причем $x_1 < x_2$. Применим к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1, x_2)$. По условию $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, то есть функция $f(x)$ возрастает в интервале (a,b).

В случае $f'(x) < 0$ утверждение теоремы доказывается аналогично.

ПРИМЕР 1.27. Определить интервалы монотонности функции $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$.

Решение: Найдем $y' = x^2 + 2x - 3$. Функция возрастает для всех значений x, для которых $y' > 0$. Решая неравенство $x^2 + 2x - 3 > 0$, получим $x \in (-\infty;-3) \cup (1;\infty)$.

Аналогично, решая неравенство $y' = x^2 + 2x - 3 < 0$, получим $x \in (-3;1)$.

Следовательно, функция возрастает в промежутках $(-\infty;-3)$ и $(1;\infty)$ и убывает в интервале $(-3;1)$.

1.17. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если существует $\delta-$ окрестность точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$

Аналогично в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет минимум, если существует $\delta-$ окрестность этой точки, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Значение функции в точке максимума (минимума) называют ***максимумом (минимумом)*** функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. ***Максимум и минимум*** функции называют ***экстремумами функции***.

Теорема 1.13 (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю, то есть $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности, в точке x_0 функция имеет максимум. Значит, в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0, \text{ если } \Delta x > 0 \text{ и}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0, \text{ если } \Delta x < 0.$$

По условию производная $f'(x_0)$ существует, следовательно, переходя в этих неравенствах к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $f'_-(x_0) \geq 0$, если $\Delta x < 0$ и $f'_+(x_0) \leq 0$, если $\Delta x > 0$. Поэтому из условия

$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$ следует, что $f(x_0) = 0$.

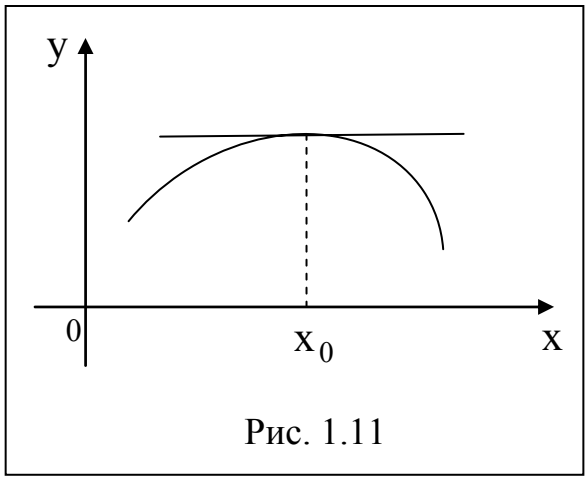


Рис. 1.11

Геометрически равенство $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси $0x$ (рис. 1.11).

Отметим, что условие $f'(x_0) = 0$ является лишь необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Например, для функции $y = x^3$ ее производная $y' = 3x^2$ равна

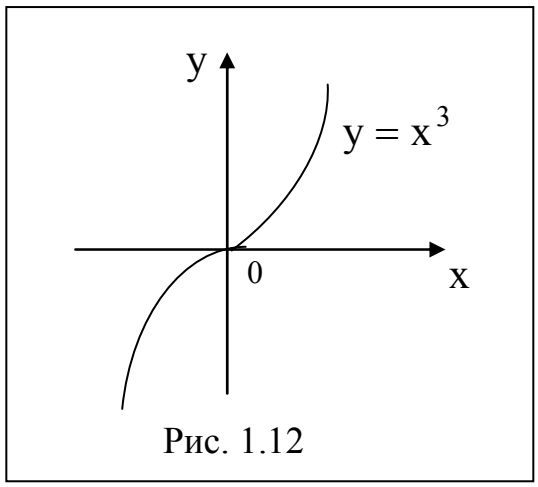


Рис. 1.12

нулю при $x = 0$, но $x = 0$ не является точкой экстремума (рис. 1.12).

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ производной не имеет, однако $x = 0$ – точка минимума (рис. 1.13).

Следовательно, если x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются ***критическими точками*** функции.

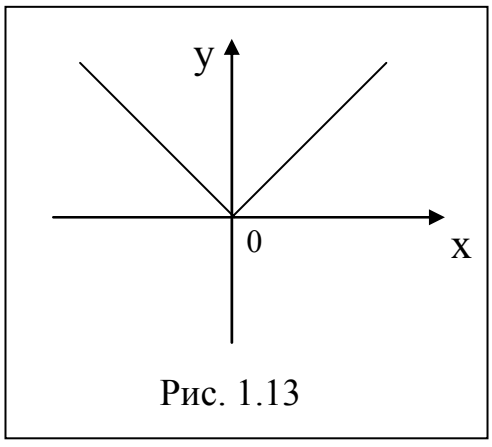


Рис. 1.13

Теорема 1.14 (достаточное условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) и при переходе аргумента x через нее слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума; если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Доказательство. Пусть x_0 – критиче-

ская точка и пусть производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то есть слева от точки x_0 $f'(x)>0$, а справа $f'(x)<0$. Из теоремы 1.11 следует, что в интервале $(x_0-\Delta x;x_0)$, где $\Delta x>0$, функция $f(x)$ возрастает и убывает для значений $x\in(x_0;x_0+\Delta x)$. А это означает, что x_0- точка максимума.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Из теорем 1.12 и 1.13 вытекает следующее правило исследования функции на экстремум:

1. найти критические точки функции $y=f(x)$;

2. выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции;

3. исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из выбранных критических точек.

ПРИМЕР 1.28. Найти экстремумы функции $y=3x^4-4x^3+5$.

Решение. Очевидно, что $D(y)=R$. Находим

$y'=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$. Определим критические точки: $12x^2(x-1)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=1$. Эти критические точки разбивают всю область определения функции на интервале $(-\infty;0)$, $(0;1)$ и $(1;+\infty)$. Полученные результаты удобно представить в виде следующей таблицы:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	-	0	-	0	+
y	↘	нет экстр.	↘	min	↗

Из таблицы видно, что в точке $x=0$ нет экстремума, а $x=1-$ точка минимума. Минимум этой функции равен $y_{min}=y(1)=4$.

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на знаке второй производной.

Теорема 1.15. Пусть в точке x_0 первая производная функции равна нулю $f'(x_0)=0$, а вторая производная существует и отлична от нуля $f''(x_0)\neq 0$. Тогда, если $f''(x_0)<0$ в точке x_0 функция имеет максимум и если $f''(x_0)>0$ – в точке x_0 функция имеет минимум.

Доказательство. Пусть для определенности $f''(x_0)>0$. Тогда по определению второй производной имеем

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-0}{\Delta x};\ \Rightarrow$$

$f''(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}>0 \Rightarrow \dfrac{f'(x_0+x)}{\Delta x}>0$ в достаточно малой окрестности точки x_0. Отсюда следует, что при $\Delta x<0$ $f'(x_0+\Delta x)<0$ и, если $\Delta x>0$, то $f'(x_0+\Delta x)>0$. Таким образом, при переходе x через точку x_0 первая производная меняет знак с «–» на «+». Следовательно, по теореме 1.13 x_0 – точка минимума.

Аналогично доказывается, что если $f'(x_0)<0$, то в точке x_0 функция имеет максимум.

1.18. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Как известно, такая функция на этом отрезке достигает наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке отрезка $[a,b]$, либо на границе отрезка.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a,b]$ необходимо:

1) найти критические точки функции в интервале (a,b);

2) вычислить значения функции в найденных критических точках;

3) вычислить значения функции на концах отрезка, то есть при $x=a$ и $x=b$;

4) из всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

ПРИМЕР 1.29. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3-9x^2+12x-8$ на отрезке $[0;3]$.

Находим критические точки: $y'=6x^2-18x+12 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 6x^2-18x+12=0 \Rightarrow \quad x_1=1,\ x_2=2$. Эти точки лежат внутри отрезка $[0;3]$; $y(1)=-3,\ y(2)=-4;\ y(0)=-8,\ y(3)=1$;

$y_{\text{наиб.}}=1$ в точке $x=3$ и $y_{\text{наим.}}=-8$ в точке $x=0$.

1.19. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым (или вогнутым вверх)*** в интервале (a,b), если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. График функции $y = f(x)$ называется ***вогнутым (или выпуклым вниз)*** в интервале (a, b), если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале.

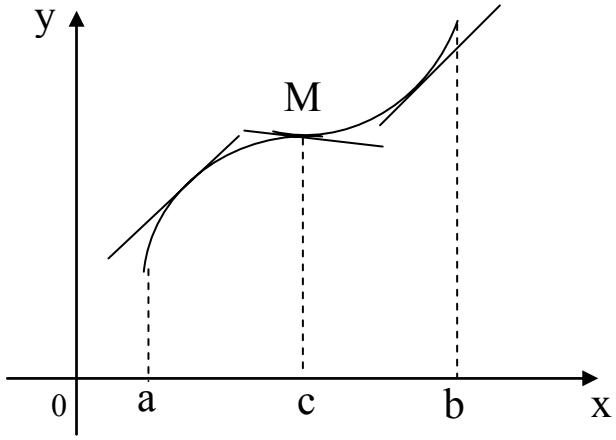


Рис. 1.14

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15. Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой части, называется ***точкой перегиба*** (рис. 1.14). В интервале (a, c) кривая $y = f(x)$ выпукла, в интервале $(c, b)-$ вогнута; точка $M(c, f(c))-$ точка перегиба.

Теорема 1.16. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a, b) имеет отрицательную вторую производную, то есть $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то график функции в этом интервале выпуклый. Если $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то график функции вогнутый.

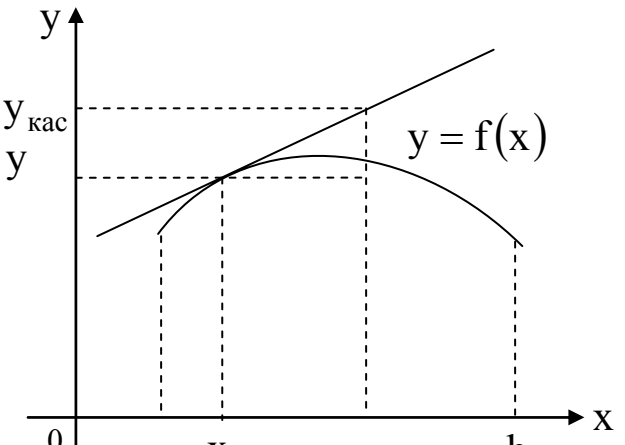


Рис. 1.15

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Возьмем на графике функции произвольную точку M с абсциссой $x_0 \in (a, b)$ и проведем через M касательную (рис. 1.15). Покажем, что график функции расположен ниже этой касательной. Для этого сравним в точке $x \in (a, b)$ ординату y кривой $y = f(x)$ с ординатой $y_{кас}$ ее касательной.

Уравнение касательной имеет вид $y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Тогда $y - y_{кас} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где c лежит между x_0 и x. Поэтому

$y - y_{кас} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ или

$y - y_{кас} = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0)$. Разность $f'(c) - f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле Лагранжа: $f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0)$, где c_1 лежит между x_0 и c. Таким образом, получаем

$y - y_{кас} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$. Из этого равенства имеем следующее:

1) если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0 \Rightarrow c - x_0 > 0$ и $f''(c_1) < 0$ (по условию теоремы). Следовательно, $y - y_{кас} < 0 \Rightarrow y < y_{кас}$;

2) если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0 \Rightarrow c - x_0 < 0$ и $f''(c_1) < 0$. Следовательно, $y - y_{кас} < 0 \Rightarrow y < y_{кас}$.

Таким образом, во всех точках интервала (a, b) ордината касательной больше ординаты графика функции, то есть график функции выпуклый. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема 1.17 (достаточное условие существования точки перегиба). Пусть в точке x_0 $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x_0)$ меняет знак, то точка графика функции с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Это значит, что слева от точки x_0 график функции выпуклый, а справа – вогнутый. Следовательно, точка $(x_0; f(x_0))$ графика функции является точкой перегиба.

ПРИМЕР 1.30. Пусть $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x \Rightarrow y'' = 0$ при $x = 0$. Поскольку вторая производная y'' меняет знак при переходе через точку $x = 0$, то в точке $(0; f(0))$ или $(0;0)$ график имеет перегиб (рис. 1.16).

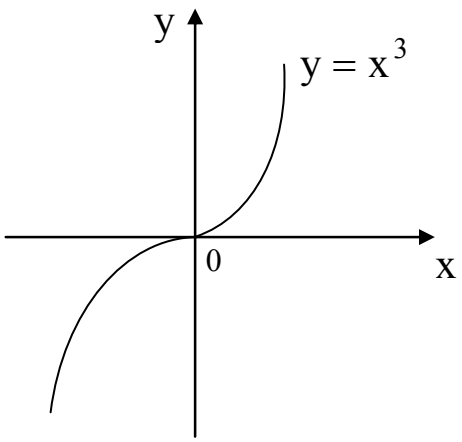


Рис. 1.16

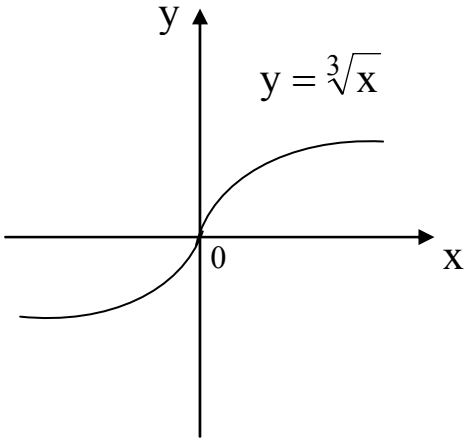


Рис. 1.17

ПРИМЕР 1.31. Пусть $y = \sqrt[3]{x}$. Имеем $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$. Вторая производная не существует в точке $x = 0$. При переходе аргумента x через точку $x = 0$ y'' меняет знак. Следовательно, точка графика функции с абсциссой $x = 0$ является точкой перегиба (рис. 1.17).

1.20. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Очень часто приходится исследовать форму кривой $y = f(x)$ при неограниченном возрастании по абсолютной величине абсциссы или ординаты переменной точки кривой. При этом важным случаем является тот случай, когда исследуемая кривая при удалении ее переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой. Такие прямые называют ***асимптотами.*** Существуют три вида асимптот: ***вертикальные, горизонтальные и наклонные.***

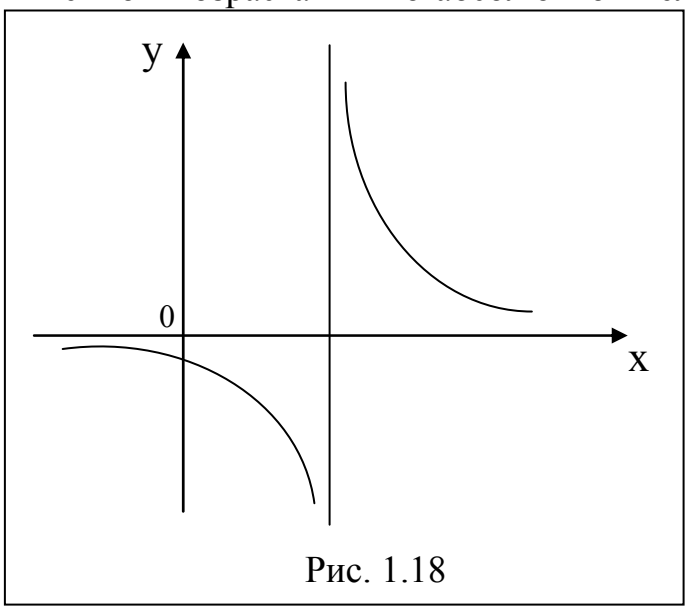


Рис. 1.18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке равен бесконечности, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$.

Например, кривая

$y = \dfrac{1}{x - 2}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 2$, так как $\lim\limits_{x \to 2 - 0} \dfrac{1}{x - 2} = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to 2 + 0} \dfrac{1}{x - 2} = +\infty$ (рис. 1.18).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17. Прямая $y = A$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = A$.

В рассмотренном выше примере прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой, так как $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{1}{x - 2} = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18. Прямая $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф, то есть $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \alpha(x) = 0$.

Укажем способ отыскания наклонной асимптоты $y = kx + b$. По

определению $f(x)=kx+b+\alpha(x) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=k+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ получим

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ или } k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Для определения b найденное значение k подставляем в равенство $f(x)-kx=b+\alpha(x)$ и снова переходим к пределу, получим

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right] \text{ или } b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Если хотя бы один из указанных выше пределов не существует или равен бесконечности, то кривая $y=f(x)$ наклонной асимптоты не имеет.

ПРИМЕР 1.32. Найти асимптоты графика функции $y=xe^x$.

Решение. Так как $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, то график функции при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты не имеет.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x=0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x-0\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{x'}{\left(e^{-x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0.$$ Следовательно, при $x \to -\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту $y=0$.

1.21. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

Исследование функции $y=f(x)$ целесообразно вести в следующей последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить четность и нечетность функции.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности функции.
6. Найти экстремумы функции.
7. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
8. На основании проведенных исследований построить график функции.

ПРИМЕР 1.33. Исследовать функцию $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение: 1. $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2. Если $x = 0$, то $y = 0$. График пересекает ось $0y$ в точке $O(0;0)$. Если $y = 0$, то $x = 0$, следовательно, график пересекает ось $0x$ в точке $O(0;0)$.

3. Функция является нечетной, так как

$y(-x) = \dfrac{-x}{1-(-x)^2} = -\dfrac{x}{1-x^2} = -y(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

4. Прямые $x = -1$ и $x = 1$ являются вертикальными асимптотами:

$$\lim_{x\to -1-0} y = \lim_{x\to -1-0} \frac{x}{1-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1+0} y = \lim_{x\to -1+0} \frac{x}{1-x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} \frac{x}{1-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} \frac{x}{1-x^2} = -\infty.$$

Найдем наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0,$$

аналогично $k = 0$ при $x \to -\infty$

$$b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(\frac{x}{1-x^2} - 0\cdot x \right) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота $y = 0$.

5. Найдем интервалы возрастания и убывания функции

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1-x^2-x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}.$$

Отсюда видно, что $y' > 0$ в области определения функции, поэтому функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

6. Исследуем функцию на экстремум. Так как $y' = \dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$, то критическими точками являются точки $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ (y' не существует), но они не входят в область определения функции. Функция экстремумов не имеет

7. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

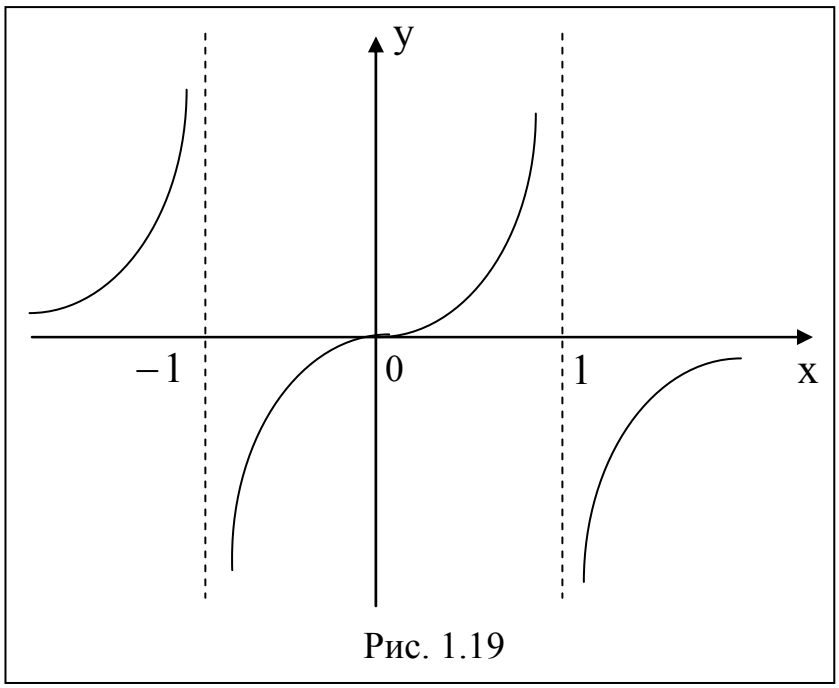


Рис. 1.19

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.При

$x \in (-\infty;-1)$ $y'' > 0 -$ кривая вогнутая;

при $x \in (-1;0)$ $y'' < 0 -$ кривая выпуклая;

при $x \in (0;1)$ $y'' > 0 -$ кривая вогнутая;

при $x \in (1;+\infty)$ $y'' < 0 -$ кривая выпуклая Точка $O(0;0)$ является точкой перегиба. График исследуемой функции изображен на рис. 1.19.

1.22. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

1.22.1. Формула Тейлора для многочлена

Рассмотрим многочлен степени n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (1.27)$$

Дифференцируя последовательно n раз, получим

$P_n'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$,

$P_n''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \ldots + (n-1) n a_n x^{n-2}$,

$P_n'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 + \ldots + (n-2)(n-1) n a_n x^{n-3}$,

… … … … … … … … … … … … … …,

$P_n^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n \; a_n$.

Положим во всех равенствах $x = 0$, тогда найдем

$$a_0 = P_n(0),\ a_1 = \frac{P_n'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{P_n''(0)}{2!},\ldots,\ a_n = \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}. \qquad (1.28)$$

Подставив найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ в равенство (1.27), получим

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{P_n'(0)}{1!}x + \frac{P_n''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (1.29)$$

Формула (1.29) называется ***формулой Маклорена для многочлена***.

Получим теперь разложение многочлена по степеням $(x - x_0)$, где x_0 – произвольное число. Пусть

Обозначим $x - x_0 = t \Rightarrow x = x_0 + t$. Тогда

$P_n(x) = P_n(x_0 + t) = \overline{P}_n(t)$ и

$$\overline{P}_n(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots + b_n t^n \qquad (1.30)$$

С учетом формул (1.28) получим

$$b_0 = \overline{P}_n(0),\ b_1 = \frac{\overline{P}'_n(0)}{1!},\ b_2 = \frac{\overline{P}''_n(0)}{2!},\ldots,\ b_n = \frac{\overline{P}_n^{(n)}(0)}{n!}.$$

Но $\overline{P}_n(t) = P_n(x_0 + t), \overline{P}'_n(t) = P_n'(x_0 + t),\ldots, \overline{P}_n^{(n)}(t) = P_n^{(n)}(x_0 + t)$

Следовательно,

$$b_0 = P_n(x_0),\ b_1 = \frac{P'_n(x_0)}{1!},\ b_2 = \frac{P''_n(x_0)}{2!},\ldots,\ b_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}. \qquad (1.31)$$

Подставив коэффициенты (1.31) в разложении (1.30), получим

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (1.32)$$

Формула (1.32) называется ***формулой Тейлора для многочлена***.

При $x_0 = 0$ получаем частный случай формулы Тейлора – формулу Маклорена.

1.22.2. Формула Тейлора для произвольной функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные до $(n+1)-$ го порядка включительно.

Тогда по аналогии с формулой (1.32) для функции $f(x)$ можно построить многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{1.33}$$

Многочлен $P_n(x)$ можно рассматривать как некоторое приближение (аппроксимацию) данной функции. Обозначая через $R_n(x)$ соответствующую ошибку (так называемый остаточный член), будем иметь

$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, или в развернутом виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x). \tag{1.34}$$

Формула (1.34) называется ***формулой Тейлора для функции*** $f(x)$**.**

Для остаточного члена получена формула

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{1.35}$$

где $c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1.$

Формулу (1.35) называют ***остаточным членом формулы Тейлора*** в форме Лагранжа.

При $x_0 = 0$ получаем формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{1.36}$$

где $c = \theta x,\ \ 0 < \theta < 1.$

1.22.3. Разложение по формуле Тейлора некоторых элементарных функций

1. Разложение функции $f(x)=e^x$.

$f(x)=e^x,\ \ f(0)=1,$

$f'(x)=e^x,\ \ f'(0)=1,$

$f''(x)=e^x,\ \ f''(0)=1,$

$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ \cdots,$

$f^{(n)}(x)=e^x,\ \ f^{(n)}(0)=1.$

Подставляя полученные выражения в формулу (1.36), получаем

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ \ 0<\theta<1.$

2. Разложение функций $f(x)=\sin x,\ \cos x$.

$f(x)=\sin x,\ \ f(0)=0,$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ \ f'(0)=1,$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ f'''(0)=-1,$$

$$f^{IV}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ f^{IV}(0)=0,$$

$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots,$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & \text{при } n=2k,\\ (-1)^k, & \text{при } n=2k+1.\end{cases}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\cos\theta x.$$

Аналогичным образом получается разложение функции $f(x)=\cos x$:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\cos\theta x.$$

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 4 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

2. Методические указания для студентов

2.1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Разность $\Delta x = x - x_0$ называется ***приращением аргумента в точке*** $x_0 \in (a, b)$. Разность $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции в точке*** x_0.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$, то он называется ***производной функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0.

Отыскание производной называется ***дифференцированием функции***.

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
3. $(e^x)' = e^x$	4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$	8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$	10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
11. $(\operatorname{arcctg} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$	12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x$
15. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \operatorname{sh} x$	16. $(\operatorname{th} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
17. $(\operatorname{cth} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	

Основные правила дифференцирования

Пусть $C = \text{const}$; $U = U(x)$; $V = V(x)$ – функции, имеющие производные. Тогда

1. $(C)' = 0$	2. $(CU)' = C\,U'$
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$	4. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - U\,V'}{V^2}$	

6. Если $y = f(U)$ и $U = U(x)$ – дифференцируемые функции, то сложная функция $y = f(U(x))$ также дифференцируема, причем $y'_x = y'_U \cdot U'_x$.

Исходя из определения производной, найти производные следующих функций.

ПРИМЕР 2.1. $y = \sqrt{2x-1}$.

Решение. Найдем приращение функции $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) =$ $= \sqrt{2(x+\Delta x)-1} - \sqrt{2x-1}$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2x+2\Delta x-1} - \sqrt{2x-1}}{\Delta x}$ и

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2x+2\Delta x-1} - \sqrt{2x-1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1} - \sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

Таким образом $y' = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

ПРИМЕР 2.2. $y = -\operatorname{ctg} x - x$.

Решение. Найдем приращение функции $\Delta y = -\operatorname{ctg}(x+\Delta x) - (x+\Delta x) +$ $+ \operatorname{ctg} x + x = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}(x+\Delta x) - \Delta x$.

Воспользуемся формулой $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$. Тогда

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x-x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin\Delta x}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-1 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-1\right)=$$

$=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$. Итак $y'=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$.

ПРИМЕР 2.3. $y=x^2-4x+3$.

Решение. Найдем приращение функции $\Delta y=(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)+$ $+3-x^2+4x-3=2x\,\Delta x+\Delta x^2-4\,\Delta x$.

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\,\Delta x+\Delta x^2-4\,\Delta x}{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\,\Delta x+\Delta x^2-4\,\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x-4)=2x-4.$$

Следовательно $y'=2x-4$.

2.2. ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Если функция задана неявным уравнением $F(x,y)=0$, т.е. не разрешенным относительно y, то для нахождения производной y'_x надо продифференцировать по x обе части этого уравнения, учитывая, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное уравнение относительно y'_x.

Найти производные y'_x следующих функций:

ПРИМЕР 2.4. $x^2-y^2-9=0$.

Решение. Так как y является функцией x, то y^2 сложная функция. Следовательно $(y^2)'=2y\cdot y'_x$. Продифференцировав по x обе части данного уравнения, получим

$(x^2-y^2-9)'=(0)' \Rightarrow (x^2)'-(y^2)'=0 \Rightarrow 2x-2y\,y'=0$, таким образом $y'=\dfrac{x}{y}$.

ПРИМЕР 2.5. $x^3+\ln y-x^2e^y=0$.

Решение. Дифференцируя по x обе части уравнения, получим

$$(x^3)'+(\ln y)'-(x^2e^y)'=0 \Rightarrow 3x^2+\frac{y'}{y}-x^2e^y\,y'-2xe^y=0.$$

Отсюда $y' = \dfrac{\left(2x\,e^{y} - 3x^{2}\right)y}{1 - x^{2}y\,e^{y}}$.

ПРИМЕР 2.6. $\sin(x\,y) + \cos(x\,y) = \operatorname{tg}(x + y)$.

Решение. Продифференцируем обе части данного уравнения по x, получим

$$\left(\sin(xy)\right)' + \left(\cos(xy)\right)' = \left(\operatorname{tg}(x+y)\right)' \Rightarrow \cos(x\cdot y)(x\,y)' - \sin(xy)(xy)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^{2}(x+y)}(x+y)' \Rightarrow \cos(xy)(y + xy') - \sin(xy)(y + xy') =$$

$$= \frac{1}{\cos_{2}(x+y)}(1+y') \Rightarrow \cos(xy)\cdot y - \sin(xy)\cdot y - \frac{1}{\cos^{2}(x+y)} =$$

$= y'\left(-x\cos(xy) + x\sin(xy) + \dfrac{1}{\cos^{2}(x+y)}\right)$. Отсюда

$$y' = \frac{\cos^{2}(x+y)\left(\cos(xy)\cdot y - \sin(xy)\cdot y\right) - 1}{\cos^{2}(x+y)\cdot\left(-\cos(xy)\cdot x + \sin(xy)\cdot x\right) + 1}.$$

ПРИМЕР 2.7. $e^{\varphi-2} + r\varphi - 3r - 2 = 0$. Найти $\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=2}$.

Решение. Дифференцируя по φ, и считая r функцией φ, найдем

$$e^{\varphi-2} + \varphi\frac{dr}{d\varphi} + r - 3\frac{dr}{d\varphi} = 0 \quad \text{отсюда} \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{e^{\varphi-2} + r}{3 - \varphi}.$$

Подставляя данные по условию значение $\varphi = 2$ в исходное уравнение найдем соответствующее значение $r\big|_{\varphi=2} = -1$. Искомое частное значение производной $\dfrac{dr}{d\varphi}$ при $\varphi = 2$ будет равно $\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=2} = \dfrac{e^{0} - 1}{3 - 2} = 0$.

Логарифмическая производная функции $f\left((x) > 0\right)$ есть производная от логарифма данной функции $\ln f(x)$:

$$\left[\ln\left(f(x)\right)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Вычисление логарифмической производной называется логарифмическим дифференцированием. Логарифмическое дифференцирование применяется при вычислении производной показательно-степенной функции

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)},$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные в точке x_0 и $f(x) > 0$, а также при нахождении производной произведения и частного нескольких функций.

Найти производные y' от следующих функций.

ПРИМЕР 2.8. $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$.

Решение. Найдем логарифм данной функции $\ln y = \ln\left((\sin 3x)^{\sqrt{x}}\right)$ или $\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln(\sin 3x)$. Дифференцируя обе части этого равенства, получим $(\ln y)' = \left(\sqrt{x}\ln(\sin 3x)\right)' \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\sin 3x) + \sqrt{x} \cdot \dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x}$. Отсюда

$$y' = y\left(\frac{\ln(\sin 3x)}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\operatorname{ctg} 3x\right) \Rightarrow y' = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(\sin 3x)}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\operatorname{ctg} 3x\right)$$

ПРИМЕР 2.9. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6x-1}\cdot\sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x-4}}$.

Решение. Прологарифмируем данное равенство

$$\ln y = \ln\left(\frac{(6x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{(15x-4)^{\frac{1}{5}}}\right) \Rightarrow \ln y = \ln(6x-1)^{\frac{1}{3}} + \ln(2x+1)^{\frac{1}{2}} -$$

$$-\ln(15x-4)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3}\ln(6x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \frac{1}{5}\ln(15x-4).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получим

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{3(6x-1)} + \frac{2}{2(2x+1)} - \frac{15}{5(15x-4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = y\left(\frac{2}{6x+1} + \frac{1}{2x+1} - \frac{3}{15x-4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sqrt[3]{6x-1}\cdot\sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x-4}}\left(\frac{2}{6x-1} + \frac{1}{2x+1} - \frac{3}{15x-4}\right).$$

ПРИМЕР 2.10. $x^y = y^x$.

Решение. Прологарифмируем обе части данного уравнения (по основанию e), затем дифференцируем по y, рассматривая x как функцию y:

$$y\ln x = x\ln y;$$

$$y'\ln x + y(\ln x)' = x'\ln y + x(\ln y)';$$

$1 \cdot \ln x + y \cdot \frac{x'}{x} = x' \cdot \ln y + x \cdot \frac{1}{y}$. Отсюда найдем:

$$x'\left(\frac{y}{x} - \ln y\right) = \frac{x}{y} - \ln x;\ x' = \frac{dx}{dy} = \frac{x(x - y\ln x)}{y(y - x\ln y)}.$$

2.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

то производная функции y по переменной x, т.е. y'_x вычисляется по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Найти производные от y по x для функций, заданных параметрически.

ПРИМЕР 2.11. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

Решение. Найдем $x'_t = -2t$ и $y'_t = 1 - 3t^2$. Следовательно $y'_x = \frac{1 - 3t^2}{-2t}$.

ПРИМЕР 2.12. $\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = a \cdot \sin t. \end{cases}$

Решение. Найдем $x'_t = -a \cdot \sin t;\ y'_t = a \cdot \cos t.$ Тогда $y'_x = -\frac{a \cdot \cos t}{a \cdot \sin t} = -\operatorname{ctg} t.$

ПРИМЕР 2.13. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2). \end{cases}$

Решение. Найдем $x'_t = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}};\ y'_t = -\frac{2t}{1 - t^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y'_x = -\frac{2t\sqrt{1-t^2}}{\left(1-t^2\right)} = -\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

ПРИМЕР 2.14. $\begin{cases} x = k\sin t + \sin kt \\ y = k\cos t + \cos kt \end{cases}$. Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0}$. Каков геометрический смысл результата?

Решение. Найдем производные от x и от y по параметру t:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k\cos t + k\cos kt \\ \frac{dy}{dt} = -k\sin t - k\sin kt \end{cases}$$

Искомая производная от y по x находится как отношение производных от y и от x по t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{k\left(\sin t + \sin kt\right)}{k\left(\cos t + \cos kt\right)} = \frac{-2\sin\frac{t+kt}{2}\cdot\cos\frac{t-kt}{2}}{2\cos\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{k+1}{2}\cdot t.$$

При $t = 0$ получим $\frac{dy}{dx} = 0$. Согласно геометрическому значению производной в точке $(0; k+1)$, где $t = 0$, касательная к графику данной функции параллельна оси Ox.

ПРИМЕР 2.15. $\begin{cases} x = \alpha^2 + 2\alpha \\ y = \ln(\alpha+1) \end{cases}$. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Решение. Найдем производные от x и от y по параметру α:

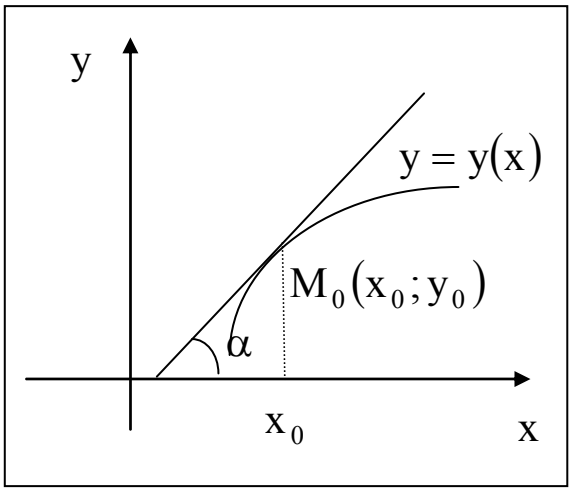
$\begin{cases} \frac{dx}{d\alpha} = 2\alpha + 2 \\ \frac{dy}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} \end{cases}$. Найдем искомую производную от y по x:

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha} : \frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{2(\alpha+1)^2} = \frac{1}{2}(\alpha+1)^{-2}$. Далее находим производную от y' по α, а затем искомую вторую производную от y по x как отношение производных от y' и от x по α:

$$\frac{dy'}{d\alpha} = -(\alpha+1)^{-3}; \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{d\alpha} : \frac{dx}{d\alpha} = -\frac{(\alpha+1)^{-3}}{2(\alpha+1)} = -\frac{1}{2(\alpha+1)^4}.$$

2.4. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ

Производная функции $y = y(x)$ при данном значении аргумента $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0.



$$\operatorname{tg}\alpha = y'(x_0)$$

Уравнение прямой, касательной к графику $y = y(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Если $y(x)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ бесконечную производную, то уравнение касательной к графику этой функции в указанной точке имеет вид $x = x_0$.

Уравнение нормали, т.е. прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно к касательной, имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $S = S(t)$, тогда скорость движения в момент $t = t_0$ есть производная от пути по времени:

$$V = S'(t_0).$$

ПРИМЕР 2.16. Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y = 2x^2 - 6x + 3$ в точке $M_0(1;-1)$.

Решение. Найдем производную функции $y = 2x^2 - 6x + 3$ при $x = 1$. Имеем $y' = 4x - 6$ отсюда $y'(1) = -2$.

В результате получим искомые уравнения касательной $y + 1 = -2(x - 1)$ или $2x + y - 1 = 0$ и уравнение нормали $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ или $x - 2y - 3 = 0$.

ПРИМЕР 2.17. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{8}$, где $t -$ время в секундах; $S -$ путь в метрах.

Определить скорость движения в конце 2-й секунды.

Решение. Найдем производную от пути по времени $S' = t^4 + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi t}{8}$.

При $t = 2$ имеем $S' = 16 + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 16 + \frac{\sqrt{2}}{8} \approx 16{,}18$.

Следовательно, искомая скорость $V \approx 16{,}18$ м/с.

ПРИМЕР 2.18. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде $x = t - \sin t;\ \ y = 1 - \cos t$ в точке, где $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Подставляя в уравнения циклоиды $t = \frac{\pi}{2}$, находим координаты точек касания: $x = \frac{\pi}{2} - 1;\ \ y = 1$. Найдем производные по x от y из уравнений циклоиды как от функции, заданной параметрически:

$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$ и вычислим ее значение для точки касания $y'_0 = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Подставляя x_0, y_0 и y'_0 в уравнение касательной и нормали получим уравнение касательной $2x - 2y - \pi + 4 = 0$ и уравнение нормали $2x + 2y - \pi = 0$.

ПРИМЕР 2.19. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = |x^3 - 1|$ в ее угловой точке.

Решение. Найдем производную y' и затем угловую точку данной кривой из условия, что для этой точки производная y' не существует, но существуют различные односторонние производные:

$y' = \left|x^3 - 1\right|' = \pm 3x^2$, где плюс соответствует интервалу $x > 1$, в котором $x^3 - 1 > 0$, а минус – интервалу $x < 1$, где $x^3 - 1 < 0$. Отсюда заключаем, что точка, где $x = 1$ является угловой, в этой точке кривая имеет две односторонние касательные с угловыми коэффициентами: $k_1 = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(-)}(1) = -3$ и $k_2 = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(+)}(1) = 3$. Пользуясь общими уравнениями касательной и нормали получим: уравнение касательных $3x - y - 3 = 0$ и $3x + y - 3 = 0$ и уравнения нормали $x + 3y - 1 = 0$ и $x - 3y - 1 = 0$.

ПРИМЕР 2.20. Точка движется по кубической параболе $12y = x^3$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

Решение. Считая в уравнение параболы y сложной функцией от времени t и дифференцируя его по t, получим $12\dfrac{dy}{dt} = 3x^2 \dfrac{dx}{dt}$.

Отсюда найдем отношение скоростей ординаты и абсциссы:

$\dfrac{dy}{dt} : \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2}{4}$. При $|x| < 2$ это отношение будет меньше 1, при $|x| = 2$ - равно 1, и при $|x| > 2$ оно будет больше 1. Следовательно:

1) при $-2 < x < 2$ ордината изменяется медленнее абсциссы;
2) при $x = \pm 2$ скорости изменения абсциссы и ординаты одинаковы;
3) при $x < -2$ и $x > 2$ ордината изменятся быстрее абсциссы.

ПРИМЕР 2.21. Резервуар, имеющий форму полушара, с внутренним радиусом R (м), наполняется водой со скоростью Q (м) в секунду. Определить скорость повышения уровня воды в резервуаре в момент, когда он будет равен 0,5R.

Решение. Обозначим через h уровень воды в м. и через V ее объем в $м^3$. Найдем зависимость между переменными h и V, пользуясь формулой для объема шарового сегмента:

$V = \pi h^2 \left(R - \dfrac{h}{3} \right)$. Дифференцируя это равенство по времени t, найдем зависимость между скоростями изменения переменных h и V

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \pi \left[2h\left(R - \frac{h}{3} \right) - \frac{1}{3}h^2 \right] \frac{dh}{dt} = \pi\left(2\pi Rh - h^2\right)\frac{dh}{dt}.$$

Полагая, согласно условию $\frac{dV}{dt} = 0{,}001Q$ $(м^3/с)$, получим $\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}001Q}{\pi h(2R-h)}$ $(м/с)$. При $h = \frac{R}{2}$, получим $\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}004}{3\pi R^2}$ (м/с).

ПРИМЕР 2.22. Скорость прямолинейного движения тела пропорционально квадратному корню из пройденного пути (как например, при свободном падении). Доказать, что это движение происходит под действием постоянной силы.

Решение. По закону Ньютону сила F, вызывающая движение, пропорционально ускорению $F = k\frac{d^2s}{dt^2}$. Согласно условию $\frac{ds}{dt} = \lambda\sqrt{s}$. Дифференцируя это равенство найдем $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}} \cdot \lambda\sqrt{s} = \frac{\lambda^2}{2}$. Следовательно, действующая сила $F = \frac{k\lambda^2}{2}$ (const).

2.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Дифференциалом 1-го порядка dy функции $y = y(x)$ называется главная часть ее приращения, пропорциональная приращению Δx независимой переменной x.

Дифференциал независимой переменной dx равен ее приращению Δx.

Дифференциал любой дифференцируемой функции $y = y(x)$ равен произведению ее производной на дифференциал независимой переменной.

$$dy = y'(x)dx$$

Это выражение верно и в том случае, когда x является функцией другого аргумента.

Если Δx достаточно мало по абсолютной величине, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости, чем Δx, имеет место приближенное равенство:

$$\Delta y \approx dy$$

или

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x.$$

Основные свойства дифференциала

1) $dc = 0$, где $C = \text{const}$;
2) $d(CU) = C \cdot dU$;
3) $d(U \pm \vartheta) = dU \pm d\vartheta$;
4) $d(U \cdot \vartheta) = U \cdot d\vartheta + \vartheta \cdot dU$;
5) $d\left(\frac{U}{\vartheta}\right) = \frac{\vartheta\, dU - U\, d\vartheta}{\vartheta^2}$, где $\vartheta \neq 0$;
6) $df(U) = f'(U)dU$.

ПРИМЕР 2.23. Найти дифференциал функции $y = e^{x^2}$.

Решение. $dy = \left(e^{x^2}\right)' dx = \left(e^x \cdot 2x\right)dx$.

ПРИМЕР 2.24. Вычислить приближенное значение $\arcsin 0{,}51$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$, полагая $x_0 = 0{,}5$; $\Delta x = 0{,}01$ и применяя формулу $\Delta y \approx dy \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, получим $\arcsin(0{,}5 + 0{,}01) \approx \approx \arcsin(0{,}5) + (\arcsin x)'\Big|_{x_0 = 0{,}5} \cdot 0{,}01 \Rightarrow \arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 +$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 \approx \frac{\pi}{6} + 0{,}01 = 0{,}513.$$

ПРИМЕР 2.25. Сравнить приращение и дифференциал функции $y = 2x^3 + 5x^2$.

Решение. $\Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 2x^3 - 5x^2 =$
$= (6x^2 + 10x)\Delta x + (6x + 5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3$, $dy = (6x^2 + 10x)dx$.

Разность между приращением функции и ее дифференциалом есть бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с Δx, равная $(6x + 5) \cdot \Delta x^2 + 2\Delta x^3$.

ПРИМЕР 2.26. Найти дифференциалы функции $F(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}$.

Решение. $dF(\varphi) = d\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}\right) = \left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}\right)' d\varphi =$

$$= -\left[\sin\frac{\varphi}{3} \cdot \left(\frac{\varphi}{3}\right)' + \cos\frac{\varphi}{3} \cdot \left(\frac{\varphi}{3}\right)'\right]d\varphi = -\left[\frac{1}{3}\sin\frac{\varphi}{3} + \frac{3}{\varphi^2}\cos\frac{3}{\varphi}\right]d\varphi.$$

ПРИМЕР 2.27. $z = \ln\left(1 + e^{10x}\right) + \operatorname{arcctge}^{5x};\ dz\big|_{x=0;\ dx=0,1}$.

Решение. $dz = \left[\dfrac{\left(1 + e^{10x}\right)'}{1 + e^{10x}} - \dfrac{\left(e^{5x}\right)'}{1 + e^{10x}}\right]dx = \left(\dfrac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} - \dfrac{5e^{5x}}{1 + e^{10x}}\right)dx =$

$= \dfrac{5e^{5x}\left(2e^{5x} - 1\right)}{1 + e^{10x}}dx$. Полагая $x = 0$ и $dx = 0{,}1$, получим $dx = 0{,}25$.

2.6. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т.е. $(y')'$.

Вторая производная обозначается y'' или $f''(x)$. Если существует производная от второй производной, то ее называют третьей производной и обозначают $f'''(x)$ или y'''

$$f'''(x) = (f''(x))'.$$

Производной $n-$ порядка называют производную от производной $(n-1)-$ го порядка. Производную $n-$го порядка обозначают $f^{(n)}(x)$ или $y^{(n)}$

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Производная скорости по времени есть скорость изменения скорости, т.е. ускорение

$$a = \vartheta' = [S'(t)]' = S''(t).$$

Если функция задана параметрически, то производные $y''_{x\,x;}$ $y'''_{x\,x\,x}$;… вычисляются по формулам

$$y''_{x\,x} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{t\,t} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

$$y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}$$

и т.д.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = d(dy)$.

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка: $d^3(y) = d\left(d^2y\right)$ и в общем виде $d^n y = d\left(d^{n-1}y\right)$.

Если $y = f(x)$, где x - независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам $d^2y = y''(dx)^2$; $d^3y = y'''(dx)^3, d^n(y) = y^{(n)}(dx)^n$.

ПРИМЕР 2.28. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = (2x-3)^3$.

Решение. $dy = 3(2x-3)^2 2dx = 6(2x-3)^2 dx$;

$d^2y = 12(2x-3)2dx^2 = 24(2x-3)dx^2$; $d^3y = 24 \cdot 2dx^3 = 48dx^3$.

ПРИМЕР 2.29. Найти $f'''(1)$, если $f(x) = x^5$.

Решение. $f'(x) = 5x^4$; $f''(x) = \left(5x^4\right)' = 20x^3$;

$f'''(x) = \left(20x^3\right)' = 60x^2 \Rightarrow f'''(1) = 60 \cdot 1^2 = 60$.

ПРИМЕР 2.30. Найти $f^{(n)}(x)$, если $f(x) = x^\alpha$, где $x > 0$.

Решение. $f'(x) = \alpha(x)^{\alpha-1}$; $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$. Далее по индукции

$y^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

ПРИМЕР 2.31. Тело движется прямолинейно по закону $S = 10t^2 + 3t - 1$, где $\rho -$ в метрах; $t -$ в секундах. Доказать, что движения происходит под действием силы.

Решение. Находим $S'(t) = \left(10t^2 + 3t - 1\right)' = 20t + 3$

$S''(t) = (20t + 3)' = 20$.

Это означает, что ускорение постоянно и равно 20 м/с. Так как по закону Ньютона действующая сила пропорциональна ускорению, то она постоянна.

ПРИМЕР 2.32. Найти y''_{xx}, если $x = a\cos^3 t;\ \ y = a\sin^3 t$.

Решение. $y'_x = \dfrac{\left(a\sin^3 t\right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t} = \dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t$

$y''_{xx} = \dfrac{\left(-\operatorname{tg} t\right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t} = \dfrac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \dfrac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$

ПРИМЕР 2.33. Найти дифференциалы второго и третьего порядков функции $v = e^{2t}$.

Решение. $dv = 2e^{2t}dt;\ d^2v = 4e^{2t}dt^2;\ d^3v = 8e^{2t}dt^3.$

ПРИМЕР 2.34. Найти дифференциалы второго и третьего порядков функции $y = x(\ln x - 1)$.

Решение. $dy = \left(x'(\ln x - 1) + x(\ln x - 1)'\right)dx \Rightarrow$

$dy = \left((\ln x - 1) + x\cdot\dfrac{1}{x}\right)dx \Rightarrow dy = (\ln x - 1 + 1)dx \Rightarrow dy = \ln x dx.$

$d^2y = d(\ln x dx) \Rightarrow d^2y = \dfrac{1}{x}dx^2;\ d^3y = d\left(d^2y\right) \Rightarrow d^3y = d\left(\dfrac{1}{x}dx^2\right) \Rightarrow$

$d^3y = -\dfrac{1}{x^2}dx^3.$

2.7. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в $\delta-$окрестности точки x_0 и $\varphi'(x) \neq 0$ при всех x из этой окрестности, тогда, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$$

или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty,$$

т.е. частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ принимает в точке $x = x_0$ неопределенную форму $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

при условии, что существует предел отношения производных.

Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке $x = x_0$ будет также неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных и т.д.

В случае неопределенности $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$ необходимо алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и далее воспользоваться правилом Лопиталя.

В случае неопределенности вида 0^0 или ∞^0 или 1^∞ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

Применяя правило Лопиталя, найти предел следующих функций.

ПРИМЕР 2.35. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение. Здесь имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя, т.е. рассмотрим предел отношения производных заданных функций

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{-x}.$$

Последний предел дает неопределенность $\frac{0}{0}$. Снова применим правило Лопиталя и получим $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{1} = 0$.

ПРИМЕР 2.36. $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot \operatorname{ctg} 3x)$.

Решение. Здесь имеет место неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Записав данную функцию как дробь, имеем $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} 3x}\right)$, получаем неопределенность $\frac{0}{0}$, т.е. воспользуемся в новом выражении правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} (x \cdot \operatorname{ctg} 3x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \frac{1}{3}.$$

ПРИМЕР 2.37. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{6}{9-x^2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведя выражение в скобках к общему знаменателю, получим $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-3+x}{9-x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{9-x^2}$. В результате имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Применив правило Лопиталя, находим $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{9-x^2}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{-2x}=\dfrac{1}{6}$.

ПРИМЕР 2.38. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида 1^{∞}. Обозначим данную функцию через y, т.е. $y=x^{\frac{1}{1-x}}$, и прологарифмируем ее $\ln y=\ln\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)=\dfrac{1}{1-x}\cdot\ln x$. Вычислим предел логарифма данной функции, применяя правило Лопиталя (имеем здесь неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$).

$\lim\limits_{x\to 1}\ln y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}=-1$, так как $\lim\limits_{x\to 1}(\ln y)=\ln\left(\lim\limits_{x\to 1}y\right)$, то $\ln\left(\lim\limits_{x\to 1}y\right)=-1$. Отсюда окончательно получаем $\lim\limits_{x\to 1}y=e^{-1}$.

ПРИМЕР 2.39. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$

Решение. В данном случае мы имеем неопределенность вида $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ и применяя правило Лопиталя получим:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}.$$

ПРИМЕР 2.40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin ax}{b\sin bx}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^2\cos ax}{b^2\cos bx}=\dfrac{a^2}{b^2}$.

ПРИМЕР 2.41. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$

Решение. В данном случае имеем неопределенность 0^0. Преобразуем заданное выражение $a = \lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$. Прологарифмируем обе части

$$\ln a = \lim_{x\to+0} \ln x^{\frac{6}{1+2\ln x}} = \lim_{x\to+0}\left(\frac{6}{1+2\ln x}\right)\cdot \ln x = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 6\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x} : \frac{2}{x}\right) = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$$

Искомый предел $a = e^3$.

ПРИМЕР 2.42. $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{m}{x^2-1}}$

Решение. В данном случае имеем неопределенность 1^∞. Обозначим данное выражение $a = \lim\limits_{x\to1} x^{\frac{m}{x^2-1}}$. Прологарифмируем обе части

$$\ln a = \lim_{x\to1} \ln x^{\frac{m}{x^2-1}} = \lim_{x\to1}\frac{m\ln x}{x^2-1} = \left|\frac{0}{0}\right| = m\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x} : 2x\right) = \frac{m}{2}.$$

Значит искомый предел равен $a = e^{\frac{m}{2}} = \sqrt{e^m}$.

2.8. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n,$$

где $R_n = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$,

где c - некоторое среднее значение между a и x, $c = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$ позволяет приближенно представить (аппроксимировать) произвольную функцию $f(x)$ в виде многочлена, называемого многочленом Тейлора. Вместе с тем позволяет оценить возникающую при этом погрешность R_n, которая во многих случаях может быть сделана сколь угодно малой.

ПРИМЕР 2.43. Представить функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в виде многочлена пятой степени относительно двучлена $(x-1)$.

Решение. Вычислим значение функции $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ и ее производных до пятого порядка включительно при $a=1$:

$$f(1)=1;\quad f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}};\qquad f'(1)=\frac{1}{3};\qquad f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}};\quad f''(1)=-\frac{2}{9};$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}};\qquad f'''(1)=\frac{10}{27};\qquad f^{IV}(x)=-\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}};\qquad f^{IV}=-\frac{80}{81};$$

$$f^{V}=\frac{880}{243}x^{-\frac{14}{3}};\ f^{V}=\frac{880}{243}.$$

Следовательно, по формуле Тейлора получим

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3-\frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4+$$

$$+\frac{880}{243\cdot 5!}(x-1)^5+R_5;$$

где $R_5=\frac{f^{VI}(\xi)}{6!}(x-1)^6=-\frac{12320}{729\cdot 6!}\cdot\xi^{-\frac{17}{3}}(x-1)^6,\ \ 1<\xi<x.$

ПРИМЕР 2.44. Вычислить с точностью до 10^{-3} приближенное значение $\sqrt[3]{29}$

Решение. Представим заданный корень так $\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$. Воспользуемся биномиальным разложением:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n,$$

где $R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}.$

Погрешность может быть сделана сколь угодно малой при $|x|<1$ и при достаточно большом n. Полагая $x=\frac{2}{27},\ \ m=\frac{1}{3}$, получим

$$\sqrt[3]{29} \cong 3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}-\frac{2^5\cdot 5}{81^4}+\ldots+R_n\right)$$

$$3\cdot|R_1|<\frac{3\cdot 2\cdot 2}{81^2}<0{,}002,\quad 3\cdot|R_2|<\frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}<0{,}0003.$$

Следовательно, для вычисления с заданной точностью достаточно взять три члена, которые предшествуют остатку R_2, т.е.

$$\sqrt[3]{29} \cong 3(1+0{,}024-0{,}0006)=3{,}072.$$

2.9. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную на отрезке $[a;b]$. Известно, что $f(x)$ на $[a;b]$ принимает свое наибольшее и наименьшее значения.

Если максимум (минимум) достигается на интервале $(a;b)$, то в этой точке имеет место экстремум. Поэтому для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a;b]$ необходимо:

1) найти критические точки на $(a;b)$;

2) вычислить значения функции в найденных критических точках и в точках $x=a$, $x=b$;

3) из этих значений выбрать наибольшее и наименьшее.

ПРИМЕР 2.45. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3-9x^2+12x-8$ на $[0;3]$

Решение. Находим критические точки:

$y'=6x^2-18x+12=0;\quad x^2-3x+2=0,\qquad x_1=1,\qquad x_2=2,$

$y(0)=-8,\quad y(1)=-1,\quad y(2)=-2,\quad y(3)=3.$

Наибольшее значение функции при $x=3$ равно 3.

Наименьшее значение функции при $x=0$ равно -8.

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет в точке $c\in(a;b)$ максимум (минимум) и не имеет в интервале $(a;b)$ других экстремумов, то в точке c $f(x)$ достигает наибольшего (наименьшего) значения на отрезке $[a;b]$ (рис.2.1). Это освобождает нас от вычисления значения функции в граничных точках отрезка.

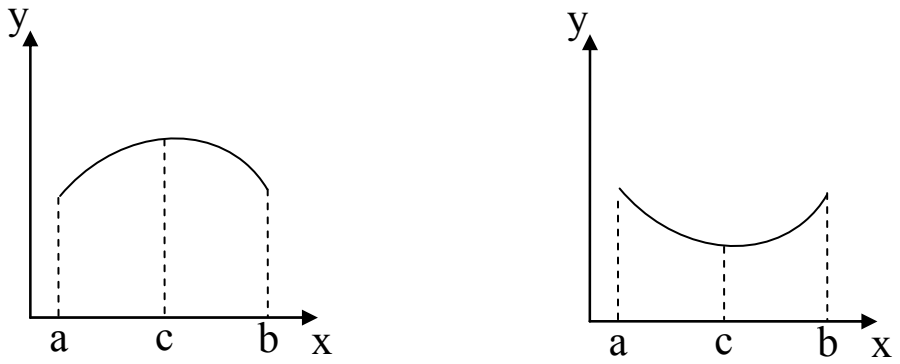


Рис. 2.1

Замечание. В помощью теории максимума и минимума решаются различные оптимизационные задачи.

ПРИМЕР 2.46. Из круглого бревна нужно вырезать балку наибольшей прочности. Прочность прямо пропорциональна ширине и квадрату толщины.

Решение. Пусть d - диаметр бревна, x - ширина, y - толщина, $d^2 = y^2 + x^2;\ y^2 = d^2 - x^2;$ p - прочность,

$$p = kxy^2 = kx\left(d^2 - x^2\right) = k\left(d^2x - x^3\right).$$

Тогда надо найти наибольшее значение функции $p(x) = k\left(d^2x - x^3\right)$ на отрезке $[0;\ d]$:

$p'(x) = k\left(d^2 - 3x^2\right),\ \ p'(x) = 0$. Отсюда $x_0 = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ - критическая точка;

$p''(x) = -6kx,\ \ p''(x_0) = -6k\dfrac{d}{\sqrt{3}} < 0$. Значит, в точке x_0 - максимальное значение функции $p(x)$ на промежутке $[0;\ d]$.

$$y_0 = \sqrt{d^2 - x_0^2} = d\sqrt{\frac{2}{3}},\ \ \frac{y_0}{x_0} = \sqrt{2}.$$

ПРИМЕР 2.47. Найти такой цилиндр, который бы имел наибольший объем при данной полной поверхности S.

Решение. Пусть радиус основания x, а высота равна y. Тогда $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$, т.е. $y = \dfrac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{S}{x} - 2\pi x\right)$. Следовательно, объем цилиндра выразится так

$$V = V(x) = \pi x^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right) = \frac{S}{2}x - \pi x^3.$$

Исследуем функцию $V(x)$ на максимум при $x > 0$. Найдем $\frac{dV}{dx} = \frac{S}{2} - 3\pi x^2$ и приравняем ее к нулю, отсюда $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Найдем вторую производную: $\frac{d^2V}{dx^2} = -6\pi x$.

Так как при $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ выполняется условие $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$, значит объем имеет наибольшее значение при $y = \frac{S - 2\pi \cdot \frac{S}{6\pi}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2x$, т.е. осевое сечение цилиндра должно быть квадратом.

2.10. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Общее исследование функции и построение ее графика рекомендуется выполнять по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Проверить заданную функцию на четность и нечетность.
3. Проверить периодичность функции.
4. Определить точки пересечения с осями координат, определить промежутки знакопостоянства функции.
5. Определить интервалы непрерывности и точки разрыва.
6. Найти асимптоты и определить поведение функции при $x \to \pm\infty$.
7. Найти интервал монотонности функции и точки экстремума с помощью первой производной.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной.
9. Определить область значений функции.
10. Построить график функции.

ПРИМЕР 2.48. Построить график функции $y = \frac{x^2}{x+1}$.

Решение. Прежде чем построить график этой функции, проведем полное исследование ее поведения.

1) Здесь $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$.

2) Так как область определения функции не симметрична относительно начала координат, то исследуемая функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того $y(-x)=\dfrac{(-x^2)}{1-x}=\dfrac{x^2}{1-x}$, т.е. $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$.

3) Функция не является периодической.

4) Функция обращается в нуль при $x=0$ и терпит разрыв в точке $x=-1$, так как функция в этой точке неопределена. Названными точками область определения функции делится на три промежутка $(-\infty;-1)$; $(-1;0)$ и $(0;+\infty)$, в каждом из которых функция сохраняет определенный знак, т.е. при

$x\in(-\infty;-1)$ имеем $y(-2)<0$

$x\in(-1;0)$ имеем $y(-0{,}5)>0$

$x\in(0;+\infty)$ имеем $y(1)>0$

5) В точке $x=-1$ функция неопределена, причем $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^2}{x+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty$. Следовательно в точке $x=-1$ функция претерпевает бесконечный разрыв (разрыв 2-го рода). Определим поведение функции на $\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty$.

6) Так как в точке $x=-1$ функция имеет бесконечный разрыв, то график функции имеет вертикальную асимптоту $x=-1$. Для отыскания наклонной асимптоты найдем следующие пределы: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x(x+1)}=1$;

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x}{x+1}=-1$. Таким образом, прямая $y=x-1$ служит наклонной асимптотой графика.

7) Дифференцируя данную функцию, получим $y'=\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. Производная y' обращается в нуль при $x_1=-2$; $x_2=0$ и терпит разрыв при $x_3=-1$. Этими точками числовая ось делится на четыре промежутка: $(-\infty;-2);(-2;-1);(-1;0);(0;+\infty)$. Выясним знак y' в каждом из них

$x\in(-\infty;-2)\Rightarrow y'(-3)>0$; $x\in(-2;-1)\Rightarrow y'(-1{,}5)<0$;

$x\in(-1;0)\Rightarrow y'(-0{,}5)<0$; $x\in(0;+\infty)\Rightarrow y'(1)>0$.

Следовательно, в промежутках $(-\infty;-2)$ и $(0;+\infty)$ функция возрастает, а в промежутках $(-2;-1)$ и $(-1;0)$ функция убывает. Точки $x=-2$ и $x=0$ являются соответственно точками максимума и минимума. Найдем значения функции в экстремальных точках $y_{max}=y(-2)=-4;\ y_{min}=y(0)=0$.

8) Дифференцируя дважды данную функцию, получим

$$y''=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4}=$$

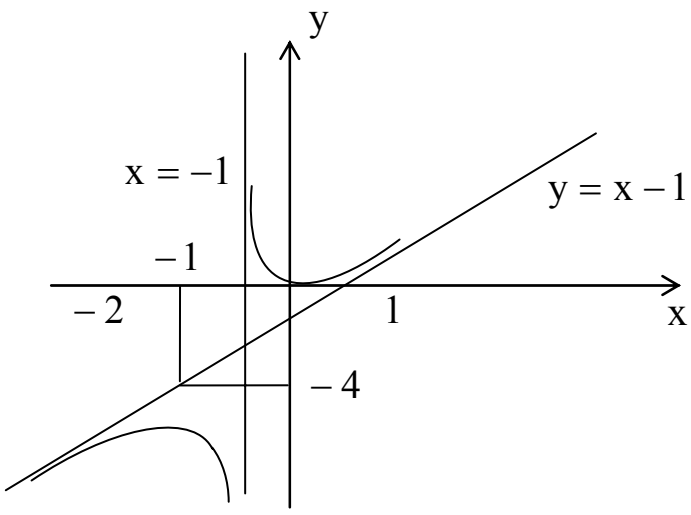
$$=2\frac{x^2+2x+1-x^2-2x}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^3}.$$

Вторая производная y'' терпит разрыв в точке $x=-1$. Этой точкой числовая ось разбивается на два промежутка: $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$. Определим знак второй производной в этих интервалах:

при $x\in(-\infty;-1)\Rightarrow y''<0$; при $x\in(-1;+\infty)\Rightarrow y''>0$.

Таким образом, в интервале $(-\infty;-1)$ кривая выпуклая, а в интервале $(-1;+\infty)-$ вогнутая. Точек перегиба нет.

9) Используя полученные результаты, строим график функции



ПРИМЕР 2.49. Построить график функции $y=xe^x$.

Решение. 1) Здесь $D(y)=R$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$f(-x) = -x\,e^{-x} \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

3) Функция не является периодической.

4) Так как функция обращается в нуль только при $x = 0$, то она имеет два промежутка знакопостоянства $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$. В первом из их $y < 0$, во втором $y > 0$.

5) Так как функция является элементарной, и $D(y) \in R$, то функция непрерывна в $D(y)$, то есть на интервале $(-\infty;+\infty)$. Причем $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{x} = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{x} = -0$.

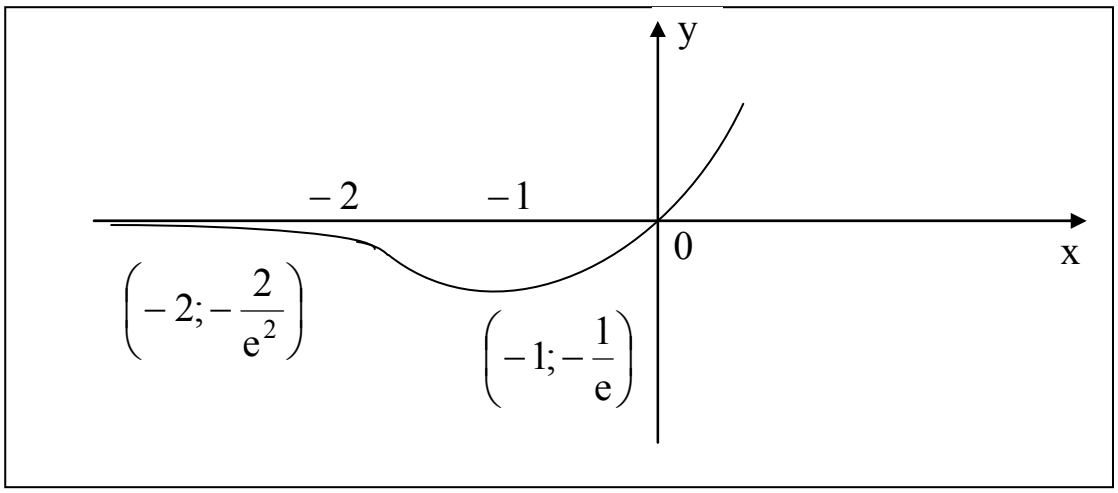
6) Так как при $x \to -\infty$ $y \to 0$, то исследуемая функция имеет левую горизонтальную асимптоту с уравнением $y = 0$. Вертикальных и наклонных асимптот кривая не имеет.

7) Найдем производную данной функции $y' = \left(x \cdot e^{x}\right)' = e^{x} + x\,e^{x} = e^{x}(x+1)$.

Производная y' обращается в нуль при $x = -1$. Тогда $x = -1$ делит область определения функции на два интервала $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$. В первом из них $y' < 0$, а во втором - $y' > 0$. Следовательно, исследуя функцию в интервале $(-\infty;-1)$ убывает, а в интервале $(-1;+\infty)-$ возрастает. Точка $x = -1$ есть точка минимума. $y_{min} = y(-1) = -\frac{1}{e}$.

8) Найдем вторую производную $y'' = e^{x}(x+1) + e^{x} = e^{x}(x+2)$. Она обращается в нуль при $x = -2$. Тогда $D(y)$ разделяется на два интервала $(-\infty;-2)$ и $(-2;\infty)$. В первом из них $y'' < 0$, во втором $y'' > 0$. Следовательно, график функции в интервале $(-\infty;-2)$ выпуклый, а в интервале $(-2;+\infty)$ вогнутый. $x = -2-$ абсцисса точки перегиба. Точка перегиба имеет координаты $\left(-2;-\frac{2}{e^{2}}\right)$.

9) По полученным результатам строим график функции.



ПРИМЕР 2.50. Исследовать и построить график функции $y = e^{\frac{1}{x}}$

Решение. 1) $D(y) = (-\infty;\ 0),\ (0;+\infty)$;

2) функция не является ни четной, ни нечетной;

3) функция непериодическая;

4) график не имеет пересечений с осями координат $y \neq 0$, точка $x = 0$ не входит в область определения.

5) функция непрерывна при $x \in D(y)$.

$$\lim_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

6) $$k = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0, \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[e^{\frac{1}{x}} - kx \right] = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Следовательно, $y = 1$ - горизонтальная асимптота при $x \to \pm\infty$;

7) исследование производной $y' = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ представлено в следующей таблице

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	-	не существует	-
y	↘	нет экстремума	↘

Знак « ↘ » означает убывание функции.

8) исследование второй производной $y'' = \frac{1+2x}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$ представлено в таблице

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$	0	$(0; +\infty)$
y'	-	0	+	не существует	+
y	⌒	точка перегиба	⌣	нет перегиба	⌣

Знаки ⌒ и ⌣ означают выпуклость вверх и вниз.

9) $E(y)$: $y = (0;1), (1;+\infty)$.

10) график функции $y = e^{\frac{1}{x}}$ представлен на рис. 2.2.

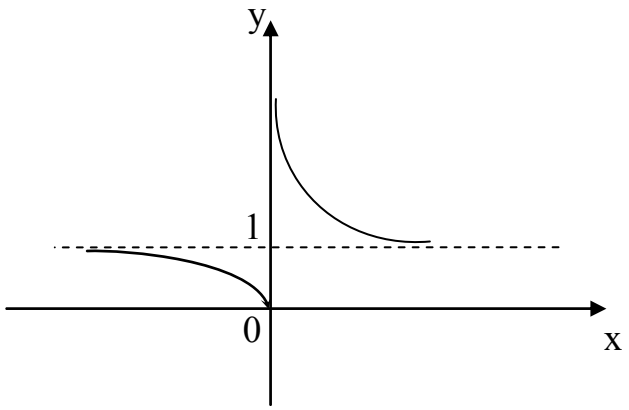


Рис. 2.2

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 4 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

3. Материалы для самостоятельной работы студентов

3.1. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие производной.
2. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
3. Механический смысл производной.
4. Правило Лопиталя.
5. Понятие дифференциала. Связь дифференциала с производной.
6. Геометрический смысл дифференциала.
7. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
8. Основные правила и формулы дифференцирования.
9. Производная сложной функции.
10. Инвариантность формулы дифференциала.
11. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно.
12. Достаточные условия монотонности функции на отрезке.
13. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума.
14. Достаточные признаки максимума и минимума функции.
15. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке.
16. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости.
17. Точки перегиба графика функции. Необходимое и достаточное условие точек перегиба.
18. Асимптоты графика функции.

3.2. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.2.1. Найти производные функций, заданных явно.

1. $y = \sqrt[5]{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 4;$	2. $y = x^3 + \sqrt[4]{x^3} + \cos x;$
3. $y = x^2 \cos x;$	4. $y = \sqrt[3]{x+1} \cdot \operatorname{arctg} x;$
5. $y = \frac{\log_a x}{\cos x} + x \cdot \arccos x;$	6. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1};$
7. $y = \frac{1}{3} e^x (\sin x + \cos x);$	8. $y = \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right);$
9. $y = \ln^3 \operatorname{arctg} x;$	10. $y = \sqrt{\operatorname{tg}^3 2x + 2};$
11. $y = x \cdot \sqrt{\ln(1+x^2)};$	12. $y = x \cdot \sqrt{(1-x^2) \cdot \sin x^2};$
13. $y = \sqrt{2x - \sin 2x};$	14. $y = \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}\right);$
15. $y = \frac{1}{3} \arccos \frac{x}{\sqrt{3}};$	16. $y = \ln \frac{a^3 + x^2}{a^3 - x^2};$
17. $y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3};$	18. $y = \log_7 \cos \sqrt{1 + x^3};$
19. $y = 10^{3 - \sin^3 3x};$	20. $y = \operatorname{agctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right);$
21. $y = \frac{3 \arcsin(x^2)}{\log_2 \sqrt{1-x^4}};$	22. $y = \frac{1}{3} \cdot \frac{\log_3 \sin^3 x}{e^{3x}};$
23. $y = 2 \operatorname{arctg}\left(\ln \frac{2}{\sqrt{x}}\right);$	24. $y = \frac{\ln \cos \sqrt{x}}{4 \arcsin^2 x};$
25. $y = \log_3 \frac{1}{\cos x};$	26. $y = \sin^2 \sqrt{2x+1};$
27. $y = \operatorname{arctg} \ln(e^x + 1);$	28. $y = \sqrt{\ln \sin x};$
29. $y = \cos^2 \sqrt{\frac{x}{3}};$	30. $y = 2^{\operatorname{tg} 2x}.$

3.2.2. Найти производные y'_x неявных функций.

1. $x^2 - y^2 - 2y = 0;$	2. $y = \cos(x + y);$
3. $x\,y = \operatorname{ctg} y;$	4. $x = \operatorname{arctg}(x + y);$
5. $x^3 + y^3 = x^2\,y^2;$	6. $\ln y + \dfrac{y}{x} = 0;$
7. $6^x + 6^y = 6^{x+y};$	8. $y = 2x + \operatorname{arctg} y;$
9. $5^x - \sin y = 5x + y^2;$	10. $e^x = x\,y;$
11. $e^x + e^y - 2^{x\,y} - 1 = 0;$	12. $x \sin y + y \sin x = 0;$
13. $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0;$	14. $x^2 \sin y + y^3 \cos x = 0;$
15. $\arcsin\dfrac{x}{y} = y \ln x;$	16. $e^{xy} - \cos(x^2 + y^2) = 0;$
17. $\cos(x - 2y) + \dfrac{x^3}{y} = 7x;$	18. $e^{xy} + \dfrac{y}{x} = \cos 3x;$
19. $\sin(xy) + \cos(xy) = y^2;$	20. $x^3 + y^3 = \sin(x - 2y).$

3.2.3. Найти производные y' функций

1. $y = x^{x+1};$	2. $y = x^{\sin 2x};$
3. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\operatorname{tg} 2x};$	4. $y = (\cos x)^{\sqrt[3]{x}};$
5. $y = (\sin 3x)^{(x^2-4)};$	6. $y = (\cos 2x)^{\sin x};$
7. $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x^2+1}};$	8. $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\arcsin x};$
9. $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^{\cos 4x};$	10. $y = (\operatorname{tg} 3x)^{\sin 6x};$
11. $y = (2x - 5)^3 \cdot (7x - 1)(x - 3);$	12. $y = (3x - 4)^4\,(2x + 7)^5 \cdot (x - 2)^3;$
13. $y = \sqrt[5]{(x + 2)^2} \cdot (x^2 - 1)^3 \sqrt{x - 4};$	14. $y = \dfrac{\sqrt[4]{(6x + 5)^3} \cdot (4x - 7)^2}{(2x + 9)^3};$
15. $y = \dfrac{(4x + 9)^3 \cdot \sqrt[5]{(10x + 1)^4}}{\sqrt[3]{(6x - 1)^2}};$	16. $y = \dfrac{\ln^3 x}{\sqrt{x - 1} \cdot \sin 2x};$
17. $y = \dfrac{e^x \cdot \arcsin x}{x^2 - 1};$	18. $y = \dfrac{(2x - 1) \cdot \sqrt[4]{14x^2 - 1}}{(2x + 1)^3};$

19. $y = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{x^2}$;	20. $y = \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{x}}$;
21. $y = x^{x^x}$;	22. $y = x^{\ln x}$;
23. $y = \left(x^2+1\right)^{\sqrt{x}}$;	24. $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$;
25. $y = \dfrac{e^{2x}(x+4)^4}{\sqrt{5x-1}}$.	

3.2.4. Найти производные от y по x для параметрически заданных функций:

1. $x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}$;	$y = \dfrac{t}{t^2-1}$.
2. $x = \ln(1+t^2)$;	$y = t - \operatorname{arctg} t$.
3. $x = \dfrac{3t}{1+t^2}$;	$y = \dfrac{3t^2}{1+t^2}$.
4. $x = 2(\varphi - \sin\varphi)$;	$y = 2(1-\cos\varphi)$.
5. $x = \sqrt[3]{t}$;	$y = \sqrt[4]{t}$.
6. $x = e^{-2t}$;	$y = e^t$.
7. $x = e^t$;	$y = 5\sin t$.
8. $x = 5\sin t$;	$y = 5\cos t$.
9. $x = \ln(1+t^2)$;	$y = \operatorname{arctg} t$.
10. $x = a(\sin t - t\cos t)$;	$y = a(\cos t + t\sin t)$.
11. $x = \sin^2 t$;	$y = \cos^2 t$.
12. $x = t^2 + 3$;	$y = t^5 - 7$.
13. $x = e^{-\varphi}$;	$y = e^{3\varphi}$.
14. $x = \ln t$;	$y = t^2$.
15. $x = t^3 + 3t + 1$;	$y = 3t^5 + 5t^2 + 1$.
16. $x = e^t \sin t$;	$y = e^t \cos t$.
17. $x = 5\operatorname{ch} t$;	$y = 4\operatorname{sh} t$.
18. $x = \dfrac{1}{2}\ln(1-t^2)$;	$y = \arcsin t$.
19. $x = t - \sin t$;	$y = 1 - \cos^2 t$.
20. $x = \dfrac{t+1}{t}$;	$y = \dfrac{t-1}{t}$.

3.2.5. Решить геометрические и физические задачи.

1. Найти уравнение касательной и нормали:

а) к гиперболе $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ в точке $A(2;3)$;

б) к кривой $y = x^3 + 4x^2 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$;

в) к параболе $y = x^2 - 4x + 4$ в точках, ординаты которых равны единице.

2. Найти угол наклона к оси $0x$ касательной, проведенной к гиперболе $x^2 - 4y^2 = 1$ в точке $A\left(2\sqrt{2};\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

3. Составить уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ в точке ее пересечения с осью $0x$.

4. Из точки $A(-1;-5)$, не лежащей на параболе $y = x^2 - 3x - 8$, провести касательные к ней.

5. Составить уравнение касательной, проведенной из точки $A\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ к ветви гиперболы $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

6. На линии $y = x^3 - 3x^2$ найти точки, в которых касательная параметра оси абсцисс.

7. На синусоиде $y = \sin x$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $x - y + 1 = 0$.

8. К кривой $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ провести касательные, параллельные прямой $3x - y + 1 = 0$.

9. Составить уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = 32$ перпендикулярно прямой $x + y + 4 = 0$.

10. Составить уравнение касательной к кривой $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^2 + t - 3 \end{cases}$ в точке $M(3;-1)$.

11. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ в точке $t = \dfrac{\pi}{4}$.

12. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = t^2 - 3t + 3 \\ y = t^2 - 4t + 3 \end{cases}$ в точке $M(1;-1)$.

13. Найти точки кривой $\begin{cases} x = 2t^3 - 9t^2 + 12t \\ y = t^2 - t + 1 \end{cases}$, в которых касательная параллельна оси $0y$.

14. Точка движется по оси абсцисс по закону

$x = \frac{1}{4}\left(t^4 = 4t^3 + 2t^2 - 12t\right)$, где $x -$ в метрах; а $t -$ в секундах.

В какой момент времени точка остановится.

15. Тело массой 25 кг движется прямолинейно по закону $x = \ln(1 + t^2)$. Найти кинетическую энергию тела $\left(\frac{mV^2}{2}\right)$ через 2 с после начала движения.

16. Радиус круга изменяется со скоростью 5 см/с. С какой скоростью изменяется длина окружности.

17. Точка движется по параболе $y = \sqrt{x}$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

18. Точка движется по архимедовой спирали $\rho = a\varphi$. Найти скорость изменения полярного радиуса ρ относительно полярного угла φ.

19. При каком значении угла синус изменяется вдвое медленнее аргумента?

20. Точка движется прямолинейно, причем $S = \frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2} + S_0$. Найти скорость в конце первой секунды.

3.2.6. Найти производные 2- го порядка от заданных функций.

1. $y = \frac{10}{x+3}$;	2. $y = \frac{1}{2}x^2(2\ln x - 1)$;
3. $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}$;	4. $y = x\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$;
5. $y = 2x\sin 3x - 3x\cos 2x$;	6. $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$;
7. $y = x^x$;	8. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t} \\ y = \sqrt{t - t^2} \end{cases}$;
9. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$;	10. $y = x^{\operatorname{tg} x}$.

3.2.7. Найти производные 3-го порядка от заданных функций.

1. $y = 1 - x^2 - x^4;$	2. $y = x^3 \ln x;$
3. $y = \operatorname{arctg} x;$	4. $y = \left(x^2 + 1\right)^3;$
5. $y = \cos x;$	6. $y = \dfrac{1}{1-x};$
7. $y = \dfrac{1+x}{1-x};$	8. $y = (2x+1)\sqrt[3]{2x+1};$
9. $y = \sqrt[3]{x};$	10. $y = \cos^4 x.$

3.2.8. Найти производные $n-$го порядка от данных функций.

1. $y = e^{-x};$	2. $y = x e^x;$
3. $y = \log_a x;$	4. $y = \sin^2 x;$
5. $y = e^{\alpha x};$	6. $y = \sin ax + \cos bx;$
7. $y = x \ln x;$	8. $y = \dfrac{1}{ax+b};$
9. $y = \sin^4 x;$	10. $y = \cos^4 x.$

3.2.9. Найти дифференциалы следующих функций.

1. $y = \dfrac{1}{x^2};$	2. $y = \sin^2 x;$
3. $y = \operatorname{arctg} 3x;$	4. $y = \dfrac{x+2}{x-1};$
5. $y = e^x \cdot \cos x;$	6. $y = 5^{x^2} \arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right);$
7. $y = \ln\left(1 + x^2\right);$	8. $y = \dfrac{\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}};$
9. $y = \ln^3 \sin x$	10. $y = 5^{\sin x}$

3.2.10. Вычислить приближенные значения выражений.

1. $\sqrt[4]{17}$;	2. $\sqrt[3]{26{,}97}$;
3. $\lg 10{,}08$;	4. $0{,}96^3$;
5. $\operatorname{tg} 46^0$;	6. $\arcsin 0{,}48$;
7. $\ln(1{,}01)$;	8. $\cos 32^0$;
9. $e^{0{,}2}$;	10. $\operatorname{arctg}\, 0{,}99$.

3.2.11. Найти приращения и дифференциалы функций для заданных значений x_0 и Δx.

1. $y = \sqrt{x}$ при $x_0 = 9$ и $\Delta x = 0{,}2$

2. $y = \dfrac{1}{x-1}$ при $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$

3. $y = x^2 - x$ при $x_0 = 10$ и $\Delta x = 0{,}01$.

4. В результате измерения радиуса круга допущена ошибка в 1%. Показать, что при вычислении площади круга по формуле $\rho = \pi r^2$, погрешность составит 2% от площади.

5. На сколько приближенно изменится ребро куба, если объем его изменится с 27 м^3 до $27{,}2$ м^3.

3.2.12. Вычислить пределы применяя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x + \sin x}{x + \sin x}$;	2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$;	4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{1-\sin x}\right)$;	6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$;
7. $\lim\limits_{x\to a}\left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$;	8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}$;	10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$;
11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$;	12. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x^2}$;	14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$;
15. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$;	16. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;
17. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$;	18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - x^2}{5x^3 - 2x^2 + 1}$;
19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x}}$;	20. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10} - 2x + 1}{x^{20} - 5x + 4}$.

3.2.13. Построить графики функций.

1. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;	2. $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$;
3. $y = (2+x)e^{-x}$;	4. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$;
5. $y = \dfrac{x}{\ln x}$;	6. $y = x^2 e^{-x}$;
7. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;	8. $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$;
9. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$;	10. $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

ОТВЕТЫ

3.2.1.

1. $\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} - \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{9}{x^4}$
2. $3x^2 + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \sin x$
3. $2x\cos x - x^2 \sin x$
4. $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} + \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{1+x^2}$
5. $\dfrac{1}{x \ln a \cos x} + \dfrac{\log_a x \cdot \sin x}{\cos^2 x} + \arccos x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}\right)^2}$
7. $\dfrac{2}{3}e^x \cos x$
8. $\sqrt{1-x^2}$
9. $\dfrac{3\ln^2 \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}\left(1+x^2\right)}$
10. $\dfrac{3\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x+2}}$
11. $\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)}+\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)}}$
12. $\dfrac{\sin^2\left(1-2x^2\right)+x^2\cos x^2\left(1-x^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\sin x^2}}$
13. $\dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}$
14. $\dfrac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}\left(1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)$
15. $\dfrac{1}{3\sqrt{3-x^2}}$
16. $\dfrac{4a^3x}{a^6-x^4}$
17. $-\dfrac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{3}}{\sin^2\dfrac{x}{3}}$
18. $-\dfrac{3x^2\operatorname{tg}\sqrt{1+x^3}}{2\sqrt{1+x^3}\ln 7}$
19. $-9\cdot 10^{3-\sin^3 3x}\cdot\sin^2 3x\cdot\cos 3x\cdot\ln 10$
20. $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$
21. $-9\cdot\ln 10\cdot 10^{3-\sin^3 3x}\cdot\sin^2 3x\cdot\cos 3x$

22. $\dfrac{2\operatorname{ctg} x + 3\ln\sin x}{\ln 3e^{3x}}$

23. $-\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1+\ln^2\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)}$

24. $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}\operatorname{tg}\sqrt{x}\arcsin x + 4\sqrt{x}\ln\cos\sqrt{x}}{8\sqrt{x-x^3}\arcsin^3 x}$

25. $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln 3}$

26. $\dfrac{\sin 2\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$

27. $\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)\left(\ln^2\left(e^x+1\right)+1\right)}$

28. $\dfrac{\operatorname{tg} x}{2\sqrt{\ln\sin x}}$

29. $-\dfrac{\sin 2\sqrt{\dfrac{x}{3}}}{2\sqrt{x}}$

30. $2^{\operatorname{tg} 2x+1}\sec^2 2x\ln 2$

3.2.2.

1. $\dfrac{x}{y+1}$

2. $-\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x+y)-1}$

3. $-\dfrac{y}{x+\operatorname{cosec}^2 y}$

4. $(x+y)^2$

5. $-\dfrac{3x^2-2xy^2}{3y^2-2x^2y}$

6. $\dfrac{y^2}{x^2+xy}$

7. $-\dfrac{6^x - 6^{x+y}}{6^y - 6^{x+y}}$
8. $\dfrac{2 + 2y^2}{y^3 + y - 1}$
9. $\dfrac{5^x \ln 5 - 5}{\cos y + 2y}$
10. $\dfrac{e^x - y}{x}$
11. $-\dfrac{e^x - y \cdot 2^{xy} \ln 2}{e^y - x \cdot 2^{xy} \ln 2}$
12. $-\dfrac{\sin y + y \cos x}{\sin x + x \cos y}$
13. $-\dfrac{y}{x}$
14. $\dfrac{-2x \sin y + y^3 \sin x}{x^2 \cos y + 3y^2 \cos x}$
15. $\dfrac{yx - y^2\sqrt{y^2 - x^2}}{xy \ln x \sqrt{y^2 - x^2} + x^2}$
16. $-\dfrac{2x \sin\left(x^2 + y^2\right) + ye^{xy}}{2y \sin\left(x^2 + y^2\right) + xe^{xy}}$
17. $\dfrac{y^2 \sin(x - 2y) - 3x^2 y + 7y^2}{2y^2 \sin(x - 2y) - x^3}$
18. $\dfrac{x^2 ye^{xy} - y + 3x^2 \sin 3x}{x - x^3 e^{yx}}$
19. $\dfrac{y \cos(xy) - y \sin(xy)}{x \sin(xy) + 2y - x \cos(xy)}$
20. $\dfrac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x - 2y)}$

3.2.3.

1. $x^{x+1}\left(\ln x + \dfrac{x+1}{x}\right)$

2. $\left(2\cos 2x\ln x+\frac{\sin 2x}{x}\right)x^{\sin 2x}$

3. $\left(\sqrt{x}\right)^{\operatorname{tg}2x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 2x}+\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}\right)$

4. $(\cos x)^{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{\ln\cos x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{tg}x\right)$

5. $(\sin 3x)^{x^2-4}\left(2x\ln\sin 3x+3\left(x^2-4\right)\operatorname{ctg}3x\right)$

6. $(\cos\ 2x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\cos\ 2x-2\sin x\cdot\operatorname{tg}2x\right)$

7. $\frac{(\operatorname{arctg}x)^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\left(x\cdot\ln\operatorname{arctg}x+\frac{1}{\operatorname{arctg}x}\right)$

8. $-\left(\frac{1}{x}\right)^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\right)$

9. $\left(\sqrt[4]{x}\right)^{\cos 4x}\left(\frac{\cos 4x}{4x}\right)-\sin 4x\cdot\ln x$

10. $(\operatorname{tg}3x)^{\sin 6x}\left(6\cos 6x\cdot\ln\operatorname{tg}3x+6\right)$

11. $(2x-5)^3(7x-1)(x-3)\left(\frac{6}{2x-5}+\frac{7}{7x-1}+\frac{1}{x-3}\right)$

12. $(3x-4)^4(2x+7)^5(x-2)^3\left(\frac{12}{3x-4}+\frac{10}{2x+7}+\frac{3}{x-2}\right)$

13. $\sqrt[5]{(x+2)^2}\left(x^2-1\right)^3\sqrt{x-4}\left(\frac{2}{5x+10}+\frac{6x}{x^2-1}+\frac{1}{2x-8}\right)$

14. $\frac{\sqrt[4]{(6x+5)^3}(4x-7)^2}{(2x+9)^3}\left(\frac{9}{12x+10}+\frac{8}{4x-7}-\frac{6}{2x+9}\right)$

15. $\frac{(4x+9)^3\sqrt[5]{(10x+1)^4}}{\sqrt[3]{(6x-1)^2}}\cdot\left(\frac{12}{4x+9}+\frac{8}{10x+1}-\frac{4}{6x-1}\right)$

16. $\frac{\ln^3 x}{\sqrt{x-1}\sin 2x}\left(\frac{3}{x\ln x}-\frac{1}{2x-2}-2\operatorname{ctg}2x\right)$

17. $\frac{e^x\arcsin x}{x^2-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}-\frac{2x}{x^2-1}\right)$

18. $\dfrac{(2x-1)\cdot\sqrt[4]{14x^2-1}}{(2x+1)^3}\left(\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{7x}{14x^2-1}-\dfrac{6}{2x+1}\right)$

19. $\left(\sqrt{1-x^3}\right)^{x^2}\left(x\ln\left(1-x^3\right)+\dfrac{3x^4}{2x^3-2}\right)$

20. $\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x^2}\right)$

21. $x^{x^x+x}\left(\ln^2 x+\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

22. $2x^{\ln x-1}\ln x$

23. $\left(x^2+1\right)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2x\sqrt{x}}{x^2+1}\right)$

24. 0

25. $\dfrac{e^{2x}(x+4)^4}{\sqrt{5x-1}}\left(2+\dfrac{4}{x+4}\right)-\dfrac{5}{10x-2}$

3.2.4.

1. $\dfrac{t^2+1}{2t-3t^2-t^4}$
2. $\dfrac{1}{2}t$
3. $\dfrac{2t}{1-t^2}$
4. $\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$
5. $\dfrac{3}{4}\cdot t^{-\frac{1}{12}}$
6. $-\dfrac{1}{2}\cdot e^{3t}$
7. $5e^{-t}\cdot\cos t$
8. $-\operatorname{tg} t$
9. $\dfrac{1}{2t}$

10. $\operatorname{ctg} t$
11. -1
12. $\frac{5}{2} \cdot t^3$
13. $-3e^{4\varphi}$
14. $2t^2$
15. $\frac{15t^4 + 10t}{3t^2 + 3}$
16. $\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$
17. $-\frac{4}{5}\operatorname{cth} t$
18. $-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$
19. $2\cos t \cdot \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$
20. -1

3.2.5.

1. 1. $y + 2x - 7 = 0,\ 2y - x - 4 = 0$

   2. $y - 11x + 15 = 0,\ y + \frac{1}{11}x + 3\frac{10}{11} = 0$

   3. $y - 2x + 7 = 0,\ y + 2x - 1 = 0;\quad y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0,$

      $y - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

2. $\frac{\pi}{6}$
3. $y = 0$
4. $y + 5x + 10 = 0$
5. касательной не существует
6. $0;\ 2$
7. $x = 2\pi k,\ k \in z$
8. $y - 3x + 1 = 0,\ y - 3x + 2 = 0,\ y - 3x + 4 = 0$

9 $y - x - 8 = 0,\ y - x + 8 = 0$

10. $y-\frac{4}{3}x+5=0$

11. $y+\frac{1}{2}x-\frac{5\sqrt{2}}{2}=0,\ \ y-2x=0$

12. $x=1,\ \ y=-1$

13. $(4;3),\ (5;1)$

14. 3 сек

15. 8 Дж

16. 10π

17. x

18. a

19. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in Z$

20. 0

3.2.6.

1. $\frac{20}{(x+3)^2}$

2. $2\ln x+2$

3. $\frac{6x^4-9x^2-1}{3\sqrt{(1-x^2)^3}}$

4. $\frac{a^2+\sqrt{x^2+a^2}}{x^2+a^2}$

5. $12(\cos 3x+\sin 2x)-x(18\sin 3x-12\cos 2x)$

6. $\frac{2x^2-1}{(1-x^2)^{3/2}}\arcsin x+\frac{x}{x^2-1}$

7. $x^x\left((\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right)$

8. $-4\sqrt{t-t^2}$

9. $-a$

10. $x^{tgx}\left[\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{tg\,x}{x}\right)^2+\frac{\cos x+2x\sin x\cdot\ln x}{\cos^3 x}+\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x}\right]$

3.2.7.

1. $-24x$
2. $11+6\ln x$
3. $\dfrac{8x^4+6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$
4. $120x^3+72x$
5. $\sin x$
6. $\dfrac{6}{(x-1)^4}$
7. $\dfrac{12}{(1-x)^4}$
8. $\dfrac{32}{27}(2x+1)^{-\frac{2}{3}}$
9. $\dfrac{10}{27}\cdot x^{-\frac{8}{3}}$
10. $4\sin 2x$

3.2.8.

1. $(-1)^n\cdot e^{-x}$
2. ne^x+xe^x
3. $\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n\ln a}$
4. $2^{n-1}\sin\left[2x+\dfrac{\pi(n-1)}{2}\right]$
5. $\alpha^n e^{\alpha x}$
6. $a^n\sin\left(ax+\dfrac{\pi n}{2}\right)+b^n\cos\left(bx+\dfrac{\pi n}{2}\right)$
7. $\dfrac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$
8. $\dfrac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$
9. $2^{2n-3}\cos\left(4x+\dfrac{\pi n}{2}\right)-2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$

10. $2^{2n-3} \cdot \cos\left(4x + \frac{\pi n}{2}\right) + 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$

3.2.9.

1. $-\frac{2dx}{x^3}$
2. $\sin 2x dx$
3. $\frac{3dx}{1+9x^2}$
4. $-\frac{3}{(x-1)^2} dx$
5. $e^x(\cos x - \sin x)dx$
6. $5^{x^2}\left(2\arcsin\frac{1}{x}\ln 5 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$
7. $\frac{2xdx}{1+x^2}$
8. $\frac{2\sqrt{x} - \sin 2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$
9. $3 \cdot \ln^2 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x \, dx$
10. $5^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 5 \, dx$

3.2.10.

1. 4,031
2. 3,011
3. 1
4. 0,88
5. 1,025
6. $29{,}98^\circ$
7. 0,1
8. 0,849
9. 1,2
10. $44{,}995^\circ$

3.2.11.

1. $0{,}03315;\ 0{,}0(3)$
2. $-0{,}0099;\ -0{,}01$

3. 0,1901; 0,19

4)

5. 0,74 см

6)

3.2.12.

1. $+\infty$ 2. 0 3. $\frac{1}{2}$ 4. 1 5. $-\infty$ 6. 1 7. $e^{\frac{2}{n}}$ 8. -2 9. 1 10. $e^{-\frac{1}{2}}$ 11. 0 12. $\frac{2}{\pi}$ 13. 1 14. 0 15. 0 16. 1 17. 1 18. $\frac{1}{5}$ 19. 1 20. $\frac{8}{15}$

3.2.13.

1. не определена при $x=1$. $y_{max}=13{,}5$ при $x=5$. Точек перегиба нет. Асимптоты $x=1$ и $y=x+5$.

2. Определена на всей числовой прямой. $y_{max}=0$ при $x=0$, $y_{min}=-3\cdot\sqrt[3]{4}$ при $x=2$. Точка перегиба $\left(-\frac{1}{2};-\frac{11}{4}\cdot\sqrt[3]{2}\right)$. Асимптот нет.

3. Определена на всей числовой прямой. $y_{min}=e$ пир $x=-1$. Точка перегиба $(0;\,2)$. Асимптота $y=0$.

4. Определена на всей числовой прямой. График симметричен относительно начала координат. $y_{max}=\frac{1}{2}$ при $x=1$, $y_{min}=-\frac{1}{2}$ при $x=-1$. Точки перегиба $\left(-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0;\,0)$, $\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Асимптота $y=0$.

5. Определена для $x>0$ и $x\neq 1$. $y_{min}=e$ при $x=e$. Точки перегиба $\left(e^{2/3};\frac{3}{2}e^{2/3}\right)$, $(e;\,e)$. Асимптота $x=0$.

6. Определена на всей числовой прямой. $y_{min}=0$ при $x=0$, $y_{max}=4e^{-2}$ при $x=2$. Точки перегиба $\left(2+\sqrt{2};\left(2+\sqrt{2}\right)^2e^{-(2+\sqrt{2})}\right)$ и $\left(2-\sqrt{2};\left(2-\sqrt{2}\right)^2e^{\sqrt{2}-2}\right)$. Асимптота $y=0$.

7. Определена для положительных x. $y_{max}=\frac{2}{e}$ при $x=e^2$. Точка перегиба $\left(e^4;\frac{4}{e^2}\right)$. Асимптоты $x=0$ и $y=0$.

8. Определена при $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Симметричен относительно оси Oy. Асимптоты $y = -2x$, $y = 0$, $y = 2x$.

9. Определена на всей числовой прямой. Симметричен относительно начала координат. $y_{max} = \frac{\pi}{2} - 1$ при $x = -1$, $y_{min} = 1 - \frac{\pi}{2}$ при $x = 1$.Точка перегиба $(0;0)$. Асимптоты $y = x - \pi$ и $y = x + \pi$.

10. Определена для $x \neq -1$. $y_{min} = 0$ при $x = -1$. Точка перегиба $\left(2; \frac{1}{9}\right)$. Асимптоты $x = -1$ и $y = 0$.

3.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание №1

Составить уравнение касательной и нормали кривой в точке M с абсциссой x_0

1. $y = \dfrac{4x - x^2}{x}$, $x_0 = 2;$
2. $y = x - x^3$, $x_0 = 1;$
3. $y = x + \sqrt{x^3}$, $x_0 = 1;$
4. $y = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$, $x_0 = 4;$
5. $y = 2x^3 + 3x - 1$, $x_0 = -2;$
6. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32$, $x_0 = 4;$
7. $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = -8;$
8. $y = 8 \cdot \sqrt[4]{x}, -70$ $x_0 = 16;$
9. $y = 2x^2 - 3x + 1$, $x_0 = -2;$
10. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$, $x_0 = 3;$
11. $y = \sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64;$
12. $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - 2}$, $x_0 = 2;$
13. $y = 2x^2 - 3$, $x_0 = 1;$
14. $y = \dfrac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}$, $x_0 = 1;$
15. $y = 2x - \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1;$
16. $y = -\dfrac{2\left(x^2 + 2\right)}{x^4 + 1}$, $x_0 = 1;$
17. $y = \dfrac{x^5 + 1}{x^4 + 1}$, $x_0 = 1;$
18. $y = \dfrac{x^{16} + 9}{1 + 5x^2}$, $x_0 = 1;$

19. $y = \dfrac{1}{3x+2}$, $x_0 = 2$;

20. $y = 3\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right)$, $x_0 = 1$;

21. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x_0 = -2$;

22. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{3}$, $x_0 = 3$;

23. $y = \dfrac{2x}{x^3+1}$, $x_0 = 1$;

24. $y = -2\left(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}\right)$, $x_0 = 1$;

25. $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$, $x_0 = 1$;

26. $y = 14\sqrt{x} - 15\cdot\sqrt[3]{x} + 2$, $x_0 = 1$;

27. $y = 3\cdot\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

28. $y = \dfrac{3x - 2x^3}{3}$, $x_0 = 1$;

29. $y = 8\cdot\sqrt[3]{x} - \dfrac{16}{3}\cdot\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$;

30. $y = \dfrac{x^2}{10} + 3$, $x_0 = 2$;

Задание №2

Найти производную

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^2}}$;

2. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{\left(x^2+2\right)^3}}$;

3. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$;

4. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$;

16. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(x^2+x+2\right)^2}}$;

17. $y = \sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}$;

18. $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$;

19. $y = \dfrac{1-\sqrt[3]{4x}}{1+\sqrt[3]{4x}}$;

5. $y = \sqrt{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

6. $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

7. $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$;

8. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$;

9. $y = \left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$;

10. $y = \left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$;

11. $y = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2}}$;

12. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$;

13. $y = \sqrt{1+\sqrt{2px}}$;

14. $y = \dfrac{3}{\left(x^2-x+1\right)^2}$;

15. $y = \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$;

20. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt[3]{1-x}}$;

21. $y = \sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}$;

22. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

23. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{(3x+1)^2}}$;

24. $y = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

25. $y = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}$;

26. $y = \sqrt[4]{x^3\cdot\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$;

27. $y = \sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}}$;

28. $y = \left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^5$;

29. $y = \sqrt[4]{x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$;

30. $y = \sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{3x}}$.

Задание №3

Найти производную

1. $y = \dfrac{\operatorname{tg}\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19\cdot\cos 38x}$;

2. $y = \dfrac{\cos\operatorname{tg}\dfrac{1}{3}\cdot\sin^2 15x}{15\cdot\cos 30x}$;

16. $y = \dfrac{\cos\operatorname{ctg}3\cdot\cos^2 14x}{28\cdot\sin 28x}$;

17. $y = \ln\sin\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{24}\dfrac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$;

3. $y = \dfrac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cdot \cos 14x};$

4. $y = \dfrac{\sin \cdot \operatorname{tg} \dfrac{1}{7} \cdot \cos^2 16x}{32 \cdot \cos 32x};$

5. $y = \dfrac{\operatorname{ctg} \sin \dfrac{1}{3} \cdot \sin^2 17x}{17 \cdot \cos 34x};$

6. $y = \operatorname{ctg} \cos 5 - \dfrac{1}{40} \cdot \dfrac{\cos^2 20x}{\sin 40x};$

7. $y = 8 \sin \operatorname{ctg} 3 + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sin^2 5x}{\cos 10x};$

8. $y = \dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36 \cdot \sin 36x};$

9. $y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \dfrac{\sin^2 21x}{21 \cdot \cos 6x};$

10. $y = \dfrac{\sin \cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4 \cdot \sin 4x};$

11. $y = \sin \sqrt{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x};$

12. $y = \dfrac{\cos \sin 3 \cdot \sin^2 2x}{2 \cdot \cos 4x};$

13. $y = \cos \ln 2 - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x};$

14. $y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{\cos^2 4x}{\sin 8x};$

15. $y = \operatorname{tg} \ln \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x};$

18. $y = \cos \operatorname{ctg} 2 - \dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x};$

19. $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \dfrac{1}{20} \cdot \dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x};$

20. $y = \operatorname{tg} \sqrt{\cos \dfrac{1}{3}} + \dfrac{\sin 31x}{31 \cdot \cos 46x};$

21. $y = \ln \cos \dfrac{1}{3} + \dfrac{\sin^2 23x}{23 \cdot \cos 46x};$

22. $y = \sqrt[7]{\operatorname{tg} \cos 2} + \dfrac{\sin^2 27x}{27 \cdot \cos 54x};$

23. $y = \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \dfrac{\cos^2 28x}{56 \cdot \sin 56x};$

24. $y = \sin^3 \cos 2 - \dfrac{\cos^2 30x}{60 \cdot \sin 60x};$

25. $y = \operatorname{ctg} \cos 2 + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x};$

26. $y = \cos^2 \sin 3 + \dfrac{\sin^2 29x}{29 \cdot \cos 58x};$

27. $y = \operatorname{ctg} \sin \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{48} \cdot \dfrac{\cos^2 24x}{\sin 48x};$

28. $y = \sin \ln \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin^2 25x}{25 \cdot \cos 50x};$

29. $y = \ln \sin 5 + \dfrac{\cos^3 16x}{48 \cdot \sin 32x};$

30. $y = \sin^2 3 + \dfrac{\cos^2 15x}{30 \cdot \sin^3 30x}.$

Задание №4

Найти производную

1. $y = \ln \ln^2 \ln^3 x;$
2. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right);$
3. $y = \ln\left(\arccos\frac{1}{x}\right);$
4. $y = \ln^2\left(x + \cos x\right);$
5. $y = \lg \ln \operatorname{ctg} x;$
6. $y = \ln\frac{\ln}{\sin\frac{1}{x}};$
7. $y = \frac{x}{2}\left(\cos \ln x + \sin \ln x\right);$
8. $y = \ln^3\left(1 + \cos x\right);$
9. $y = \ln\cos\frac{2x+3}{2x+1};$
10. $y = \ln \arccos\sqrt{1-e^{4x}};$
11. $y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1-x^4}};$
12. $y = \ln\frac{x^2}{1-x^2};$
13. $y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}};$
14. $y = \ln\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2};$
15. $y = \ln\frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}};$
16. $y = \ln \ln^3 \ln^2 x;$
17. $y = \log_{16} \log_8 \operatorname{tg} x;$
18. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}};$
19. $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}};$
20. $y = \ln \ln \sin\left(1+\frac{1}{x}\right);$
21. $y = \ln \sin\frac{2x+4}{x+1};$
22. $y = \ln\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}};$
23. $y = \ln\left(b\,x + \sqrt{a^2+b^2x^2}\right);$
24. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right) - \sqrt{x-a};$
25. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x + \sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right);$
26. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right);$
27. $y = \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right);$
28. $y = 2\sqrt{x} - 4\ln\left(2+\sqrt{x}\right);$
29. $y = \ln^3\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}\right);$
30. $y = \ln^2\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right).$

Задание №5

Найти производную

1. $y=(3x+1)^4 \arcsin\frac{1}{3x+1}+(3x^2+2x+1)\sqrt{9x^2+6x};$
2. $y=\frac{2}{3}(4x^2-4x+3)\sqrt{x^2-x}\,(2x-1)^4 \arcsin\frac{1}{2x-1};$
3. $y=(2x+3)^4 \arcsin\frac{1}{2x+3}+\frac{2}{3}(4x^2+12x+11)\sqrt{x^2+3x+2};$
4. $y=\frac{2}{3x-2}\sqrt{3+12x-9x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2};$
5. $y=\frac{1}{x}\sqrt{1-4x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x};$
6. $y=\frac{1}{24}(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+\frac{x^4}{16}\arcsin\frac{2}{x};$
7. $y=\ln\frac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{x-2}-\frac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^2};$
8. $y=\sqrt{x^2-8x+17}\,\operatorname{arctg}(x-4)-\ln\left(x-4+\sqrt{x^2-8x+17}\right);$
9. $y=3x^2-4x+2\sqrt{9x^2-12x+3}\,(3x-2)^2 \arcsin\frac{1}{3x-2};$
10. $y=3x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{-6x}}\right)-e^{-3x}\arcsin\left(e^{3x}\right);$
11. $y=\frac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1}+\frac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2};$
12. $y=5x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{10x}}\right)-e^{-3x}\arcsin\left(e^{3x}\right);$
13. $y=\sqrt{9x^2-12+5}\,\operatorname{arctg}(3x-2)+\sqrt{9x^2-12x+15};$
14. $y=\ln\left(4x-1+\sqrt{16x^2-8x+2}\right)-\sqrt{16x^2-8x+2}\operatorname{arctg}5x;$
15. $y=\ln\left(5x+\sqrt{25x^2+1}\right)-\sqrt{25x^2+1}\operatorname{arctg}5x;$
16. $y=2x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{4x}}\right)-e^{-2x}\arcsin\left(e^{2x}\right);$
17. $y=\frac{2}{x-1}\sqrt{2x-x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1};$
18. $y=x\sqrt{(x^2+a^2)}+\frac{3a^2x}{x}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right);$

19. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$;

20. $y=4\arcsin\frac{4}{2x+3}+\sqrt{4x^2-12x-7}$;

21. $y=\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$;

22. $y=\left(x^2-1\right)\sqrt{1-\operatorname{tg}x}+\arcsin(2x-3)$;

23. $y=x\left(\arcsin x\right)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$;

24. $y=\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

25. $y=\frac{2x-1}{4x^2-4x+3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

26. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$;

27. $y=2\arcsin\frac{2}{3x+1}+\sqrt{9x^2-5x-3}$;

28. $y=3\arccos\frac{3}{2x+1}+\sqrt{x^2+x-5}$;

29. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{x}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$;

30. $y=3\arcsin\frac{3}{2x-1}+\sqrt{x^2-x-4}$.

Задание №6

Найти производную

1. $y=\left(\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{2}\ln\operatorname{arctg}x}$;
2. $y=x^{x^2}$;
3. $y=^{\sin x^2}$;
4. $y=\left(\ln x\right)^{3^x}$;
5. $y=\left(x^3+1\right)^{\operatorname{th}x}$;
16. $y=x^{2\operatorname{ctg}x}$;
17. $y=\left(x^2+1\right)^{\cos x}$;
18. $y=\left(\operatorname{tg}x\right)^{4e^x}$;
19. $y=x^{2\operatorname{arctg}x}$;
20. $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$;

6. $y = \left(x^2 - 1\right)^{\operatorname{sh} x}$;
7. $y = x^{\arcsin x}$;
8. $y = \left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\sin\sqrt{x}}$;
9. $y = x^{29^x}\ 29^x$;
10. $y = (\arcsin x)^{e^x}$;
11. $y = (\sin x)^{5e^x}$;
12. $y = 19^{x^{19}}\ x^{19}$;
13. $y = x^{2^x}\ 2^x$;
14. $y = (x\sin x)^{\ln(x\sin x)}$;
15. $y = x^{3\sin x}$;
21. $y = (x-5)^{\ln x}$;
22. $y = x^{\operatorname{ctg} x}$;
23. $y = x^{2\cos x}$;
24. $y = (\sin x)^{5^{\frac{x}{2}}}$;
25. $y = \left(x^3 + 4\right)^{\operatorname{tg} x}$;
26. $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$;
27. $y = (\cos 5x)^{e^x}$;
28. $y = \left(x^4 + 5\right)^{\operatorname{ctg} x}$;
29. $y = x^{2x}\ 5^x$;
30. $y = (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{4}\ln\operatorname{tg} x}$.

Задание №7

Найти производную указанного порядка

1. $y = e^{1-2x}\sin(2+3x),\ y''' - ?$;
2. $y = \left(x^2 + 3\right)\ln(x-3),\ y''' - ?$;
3. $y = \dfrac{\ln x}{x^2},\ y''' - ?$;
4. $y = (4x+3)\cdot 2^{-x},\ y''' - ?$;
5. $y = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3},\ y'' - ?$;
6. $y = \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}},\ y'' - ?$;
7. $y = \left(1 + x^2\right)\cdot \operatorname{arctg} x,\ y''' - ?$;
8. $y = \left(4x^3 + 5\right)e^{2x+1},\ y''' - ?$;
9. $y = x\cdot\cos x^2,\ y''' - ?$;
10. $y = \dfrac{\log_2 x}{x^3},\ y'' - ?$;
16. $y = \left(2x^2 - 7\right)\ln(x-1),\ y''' - ?$;
17. $y = (x+7)\ln(x+4),\ y''' - ?$;
18. $y = \left(x^3 + 2\right)^{e^{4x+3}},\ y''' - ?$;
19. $y = \dfrac{\ln x}{x^5},\ y''' - ?$;
20. $y = e^{\frac{x}{2}}\sin 2x,\ y'' - ?$;
21. $y = \dfrac{\ln(2x+5)}{2x+5},\ y'' - ?$;
22. $y = x\cdot\ln(1-3x),\ y''' - ?$;
23. $y = \left(1 - x - x^2\right)^{e^{\frac{x+1}{2}}},\ y''' - ?$;
24. $y = (3x-7)\cdot 3^{-x},\ y''' - ?$;
25. $y = (5x-8)\cdot 2^{-x},\ y''' - ?$;

11. $y = \dfrac{\ln x}{x^3},\ y''' - ?;$

12. $y = (2x+3)\ln^2 x,\ y''' - ?;$

13. $y = x^2\ \sin(5x-3),\ y''' - ?;$

14. $y = \dfrac{\ln(x-2)}{x-2},\ y^{IV} - ?;$

15. $y = e^{-x}\ (\cos 2x),\ y''' - ?;$

26. $y = (5x-1)\ln^2 x,\ y'' - ?;$

27. $y = \dfrac{\log_3 x}{x^2},\ y'' - ?;$

28. $y = (2x^3+1)\cdot \cos x,\ y''' - ?;$

29. $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x,\ y''' - ?;$

30. $y = e^x\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\ y'' - ?$

Задание №8

Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра t_0

1. $\begin{cases} x = a\cdot \sin^3 t, \\ y = a\cdot \cos^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{3};$

2. $\begin{cases} x = 2\cdot e^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases} \quad t_0 = 0;$

3. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t_0 = -2;$

4. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t_0 = -\dfrac{\pi}{3};$

5. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}, \end{cases} \quad t_0 = -1;$

6. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{4};$

16. $\begin{cases} x = a\,t\cdot \cos t, \\ y = a\,t\cdot \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2};$

17. $\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{ctg} t + 1, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{4};$

18. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

19. $\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases} \quad t_0 = -1;$

20. $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

21. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{6};$

7. $\begin{cases} x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3+2\ln t}{t}, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

8. $\begin{cases} x = a \cdot \sin^3 t, \\ y = a \cdot \cos^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{6};$

9. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases} \quad t_0 = 2;$

10. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^2, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

11. $\begin{cases} x = \arcsin \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

12. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{t}{t^2-1}, \end{cases} \quad t_0 = 2;$

13. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{3};$

14. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{4}t^4, \\ y = \dfrac{1}{2}^3 t^2 + \dfrac{1}{3}t^3, \end{cases} \quad t_0 = 0;$

15. $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t), \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{4};$

22. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

23. $\begin{cases} x = 2\,\mathrm{tg}\, t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{4};$

24. $\begin{cases} x = a \cdot (t - \sin t), \\ y = a \cdot (1 - \cos t), \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{3};$

25. $\begin{cases} x = \dfrac{2t + t^2}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{2t - t^2}{1+t^3}, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

26. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases} \quad t_0 = 2;$

27. $\begin{cases} x = t \cdot (1 - \sin t), \\ y = t \cdot \cos t, \end{cases} \quad t_0 = 2;$

28. $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \quad t_0 = 2;$

29. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{5}{6};$

30. $\begin{cases} x = a \cdot (t\sin t + \cos t), \\ y = a \cdot (\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{5}{4}.$

Задание № 9

Найти производную функции, заданной неявно

1. $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0;$
2. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3};$
3. $e^9 \sin x = e^{-x} \cos y;$
4. $e^x - e^y = y - x;$
5. $\sqrt[x]{y} = \sqrt[9]{x};$
6. $y = \operatorname{tg}(x + y);$
7. $x + y = e^{x-y};$
8. $x + \sqrt{x\,y} + y = a;$
9. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y};$
10. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0;$
11. $e^y + x\,y = e;$
12. $y = x + \operatorname{arctg} y;$
13. $x^3 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0;$
14. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0;$
15. $x^3 + x^2 y + y^2 = 0;$
16. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 0;$
17. $y \cdot \sin x - \cos(x - y) = 0;$
18. $x - y = \arcsin x - \arcsin y;$
19. $2^x + 2^y = 2^{x+y};$
20. $x^3 + a\,x^2 y + b\,x\,y^2 + y^3 = 0;$
21. $2\,y \cdot \ln y = x;$
22. $y = 1 + x \cdot e^y;$
23. $y^2 \cdot \cos x = a^2 \sin 3x;$
24. $x^4 + y^4 = x^2 \cdot y^2;$
25. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \sqrt{\dfrac{1-k}{1+k}} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2};$
26. $x^3 \cdot y^2 + 5\,x\,y + 4 = 0;$
27. $x^3 y - 3x^2 y^2 + 5y^2 - 3x + 4 = 0;$
28. $x^2 y + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = 0;$
29. $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{a} - \dfrac{y}{a} = 0;$
30. $\left(x^2 + y^2\right)^2 - a^2\left(x^2 - y^2\right) = 0.$

Задание №10

Найти дифференциал dy и показать, что функция y удовлетворяет уравнению (1)

1. $y = x \cdot e^{-x^2/2},$
   $x\,y' = \left(1 - x^2\right)y \quad (1);$
2. $y = \dfrac{\sin x}{x},$
   $x\,y' \mid + y = \cos x \quad (1);$
16. $y = \operatorname{tg} \ln 3x,$
    $\left(1 + y^2\right)dx = x\,dy \quad (1);$
17. $y = -\sqrt{\dfrac{2}{x^2} - 1},$
    $1 + y^2 + x\,y\,y' = 0 \quad (1);$

3. $y = 5e^{-2x} + \frac{e^x}{3}$,
$y' + 2y = e^x$ (1);

4. $y = 2 + c\sqrt{1-x^2}$,
$(1-x^2)y' + xy = 2x$ (1);

5. $y = x\sqrt{1-x^2}$,
$yy' = x - 2x^3$ (1);

6. $y = \frac{c}{\cos x}$,
$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0$ (1);

7. $y = -\frac{1}{3x + c}$,
$y' = 3y^2$ (1);

8. $y = \ln(c + e^x)$,
$y' = e^{x-y}$ (1);

9. $y = \sqrt{x^2 - cx}$,
$(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$ (1);

10. $y = x(c - \ln x)$,
$(x - y)dx + xdy = 0$ (1);

11. $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$,
$y' \sin x = y \ln y$ (1);

12. $y = (1 + x)/(1 - x)$,
$y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$ (1);

18. $y = \sqrt[3]{x - \ln x - 1}$,
$\ln x + y^3 - 3x y^2 y' = 0$ (1);

19. $y = a + \frac{7x}{ax + 1}$,
$y - x y' = a(1 + x^2 y')$ (1);

20. $y = a \cdot \operatorname{tg}\sqrt{\frac{a}{x} - 1}$,
$a^2 + y^2 + 2x\sqrt{ax - x^2}\ y' = 0$ (1);

21. $y = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}}$,
$8x y' - y = \frac{-1}{y^3\sqrt{x + 1}}$ (1);

22. $y = (x^2 + 1)e^{x^2}$,
$y' - 2x y = 2x e^{x^2}$ (1);

23. $y = \frac{2x}{x^3 + 1} + \frac{1}{x}$,
$x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3 - 2}{x}$, (1);

24. $y = e^{x + x^2} + 2e^x$,
$y' - y = 2x e^{x + x^2}$ (1);

25. $y = -x\cos x + 3x$,
$xy' = y + x^2 \sin x$ (1);

26. $y = 1/\sqrt{\sin x + x}$,
$2(\sin x)y' + y\cos x =$
$y^3(x\cos x - \sin x)$ (1);

27. $y = x/(x - 1) + x^2$,
$x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1)$ (1);

13. $y=(b+x)/(1+bx)$,
$y-xy'=b(1+x^2y')$ (1);

$y=\sqrt[3]{2+3x-3x^2}$,

14. $y\,y'=\dfrac{1-2x}{y}$ (1);

15. $y=\sqrt{\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^2+1}$,
$(1+e^x)y\,y'=e^x$ (1);

28. $y=x/\cos x$,
$y'-y\,tgx=\sec x$ (1);

$y=(x+1)^n\left(e^x-1\right)$,

29. $y'=\dfrac{n\,y}{x+1}=e(1+x)^n$ (1);

30. $y=2\dfrac{\sin x}{x}+\cos x$,
$x(\sin x)y'+(\sin x-x\cos x)y=$
$=\sin x\cos x-x$ (1).

Задание №11

Вычислить приближенно

1. $y=x^4$ при $x=3{,}998$;
2. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ при $x=1{,}56$;
3. $y=\sqrt[3]{x}$ при $x=7{,}76$;
4. $y=\arcsin x$ при $x=0{,}08$;
5. $y=\sqrt[3]{x}$ при $x=26{,}46$;
6. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x=4{,}16$;
7. $y=\sqrt{x^2+x+3}$ при $x=1{,}97$;
8. $y=\sqrt{x^2+7x}$ при $x=1{,}012$;
9. $y=\sqrt{1+x+\sin x}$ при $x=0{,}01$;
10. $y=\sqrt[3]{x^2}$, при $x=1{,}03$;
11. $y=\sqrt{4x-1}$, при $x=2{,}56$;
12. $y=x^{21}$, при $x=0{,}998$;
13. $y=\sqrt[3]{x}$, при $x=8{,}24$;
14. $y=\dfrac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$ при $x=0{,}98$;
15. $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}$; при $x=0{,}97$;

16. $y = x^5$ при $x = 2{,}997$;

17. $y = \sqrt[3]{x}$, при $x = 1{,}21$;

18. $y = x^{11}$, при $x = 1{,}021$;

19. $y = \sqrt[3]{x^2}$, при $x = 1{,}03$;

20. $y = \sqrt[3]{x}$, при $x = 27{,}54$;

21. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$, при $x = 1{,}018$;

22. $y = \sqrt{x^2 + 5}$, при $x = 1{,}97$;

23. $y = x^6$, при $x = 2{,}01$;

24. $y = \sqrt[3]{x}$, при $x = 7{,}64$;

25. $y = \sqrt[3]{x}$, при $x = 8{,}34$;

26. $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$, при $x = 0{,}01$;

27. $y = \sqrt[4]{2x - \sin\dfrac{\pi x}{2}}$ при $x = 1{,}02$;

28. $y = x^7$ при $x = 2{,}002$;

29. $y = x^7$, при $x = 1{,}998$;

30. $y = \sqrt{x^3}$, при $x = 0{,}98$.

Задание № 12

Вычислить пределы функций, применяя правило Лопиталя

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x - \sin x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^x}{\sin 3x - \sin 5x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^{2x} - 7^{-x}}{2\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$;

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x\right]$;

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1 + x^2\right)}{\cos 3x - e^{-x}}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x^2}{\ln\cos\left(2x^2 - x\right)}$;

20. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{5}{x^5 - 1} - \dfrac{7}{x^7 - 1}\right)$;

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^{2}}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1+0} \ln x \cdot \ln(x-1)$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{2} e^{-2x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{x}-1}\right)$;

10. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{tg} x$;

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^{2})}{\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^{3}}-1-x^{3}}{\sin^{6} 2x}$;

14. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{4} e^{-x}$;

15. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(x+e^{x})$;

21. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \sin(2x-1)\cdot \operatorname{tg}\pi x$;

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-4\sin^{2}\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)}{1-x^{2}}$;

23. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{3}+x^{2}-5x+3}{x^{3}-x^{2}-x+1}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{3}-(1+3x)}{x^{2}+x^{5}}$;

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$;

26. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{16}}-\dfrac{1}{4}}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+x}-\sqrt{2x}}$;

27. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{4}}-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+x}-\sqrt{2x}}$;

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+x^{2}}-(1+x)}{x}$;

29. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6}+2}{x+2}$;

30. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{9}}-\dfrac{1}{3}}{\sqrt{\dfrac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}}$.

Задание № 13

Вычислить пределы функций, применяя правило Лопиталя

1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$;

16. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}}$;

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$;

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$;

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\frac{18\sin x}{\operatorname{ctg} x}}$;

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}$;

7. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$;

8. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$;

9. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$;

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$;

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{6\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}3x}$;

12. $\lim\limits_{x\to 4\pi}\left(\cos x\right)^{\frac{5}{\operatorname{tg}5x\cdot\sin 2x}}$;

13. $\lim\limits_{x\to 1+}\left(x-1\right)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}$;

14. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\operatorname{ctg}2x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$;

18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\operatorname{tg}x\right)^{\operatorname{ctg}x}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\operatorname{ctg}x\right)^{\operatorname{tg}x}$;

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$;

22. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$;

23. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln(x+e)\right)^{\frac{1}{x}}$;

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln 2x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$;

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)^{x}$;

28. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}}$;

15. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{3}{1+2\ln x}}$;

30. $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}$.

Задание №14

Исследовать на экстремум следующие функции

1. $y=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$;
2. $y=\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg} x$;
3. $y=\frac{e^x}{(x+3)^2}$;
4. $y=2x^3-3x^2+1$;
5. $y=\frac{x^3}{(x-2)\cdot(x+3)}$;
6. $y=\frac{x}{x^2+x+1}$;
7. $y=\frac{2}{3}\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{6x-7}$;
8. $y=-x^2\cdot\sqrt{x^2+2}$;
9. $y=x^3-6x^2+12x$;
10. $y=x+\sqrt{x^2+a^2}$;
11. $y=x^{\frac{2}{3}}-x$;
12. $y=e^{3-6x-x^2}$;
13. $y=\sqrt{x^2-4x-5}$;
14. $y=2x^3-6x^2-18x+7$;
16. $y=x^4+4x^3-2x^2-12x+5$;
17. $y=2^{\sin x}$;
18. $y=x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$;
19. $y=\frac{\ln^2 x}{x}$;
20. $y=x-\operatorname{arctg} x$;
21. $y=\sqrt{3x-7}$;
22. $y=x^3 e^{-x}$;
23. $y=\frac{x^{2/3}}{x+2}$;
24. $y=\frac{x^3}{3-x^2}$;
25. $y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;
26. $y=x-\ln(1+x)$;
27. $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;
28. $y=\frac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$;
29. $y=\frac{4\sqrt{3}}{9x\cdot\sqrt{1-x}}$;

15. $y = 4x - x^4$;

30. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8^2}$.

Задание №15

Провести полное исследование функции и построить график

1. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;

2. $y = \dfrac{1}{6}\left(x^3 - 7x + 5\right)$;

3. $y = 2x - 1 - \dfrac{1}{x+1}$;

4. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$;

5. $y = \dfrac{x}{3 - x^2}$;

6. $y = \dfrac{x^3 + x}{x^2 - 1}$;

7. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$;

8. $y = x + \dfrac{1}{x^2}$;

9. $y = x + \dfrac{2x}{x^2 - 1}$;

10. $y = \dfrac{3x - 2}{5x^2}$;

11. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$;

12. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$;

13. $y = \dfrac{2x - 1}{(x-1)^2}$;

14. $y = \dfrac{x^5 - 8}{x^4}$;

16. $y = \dfrac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$;

17. $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$;

18. $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$;

19. $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1}$;

20. $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$;

21. $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$;

22. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

23. $y = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x-2}$;

24. $y = \dfrac{1 + 2x}{(x+1)^2}$;

25. $y = \dfrac{2x}{(x-1)^2}$.

26. $y = \dfrac{3x}{x-1} + 3x$;

27. $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$;

28. $y = \dfrac{1 - x}{x^2}$;

29. $y = -\dfrac{1}{5}\left(x^4 - 4x^3\right)$;

15. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$;

30. $y = \dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$.

Задание №16

Провести полное исследование функции и построить ее график

1. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$;

2. $y = x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$;

3. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

4. $y = \dfrac{x+3}{x} \cdot e^{-x}$;

5. $y = e^{-x^4}$;

6. $y = \sqrt[3]{x} - x$;

7. $y = x^2 \cdot e^{-x}$;

8. $y = (x^2-4) \cdot \sqrt[3]{x^2}$;

9. $y = (x+1)^2 \cdot e^{-x}$;

10. $y = x \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$;

11. $y = (x-1) \cdot \sqrt{x}$;

12. $y = \dfrac{x}{x-3} \cdot e^x$;

13. $y = \dfrac{10 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$;

14. $y = x^2 \cdot e^{-x^2}$;

15. $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

16. $y = \dfrac{\sqrt{4x^3 - x^4}}{3}$;

17. $y = x^4 \cdot e^{-x}$;

18. $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x-1}$;

19. $y = (x^2-4) \cdot \sqrt[3]{x^2}$;

20. $y = \dfrac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{x^2}$;

21. $y = (x+2)^2 \cdot \sqrt[3]{x}$;

22. $y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$;

23. $y = \ln(4-x^2)$;

24. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

25. $y = x^3 \cdot e^{-x}$;

26. $y = x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$;

27. $y = (x-2) \cdot e^{-3x}$;

28. $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$;

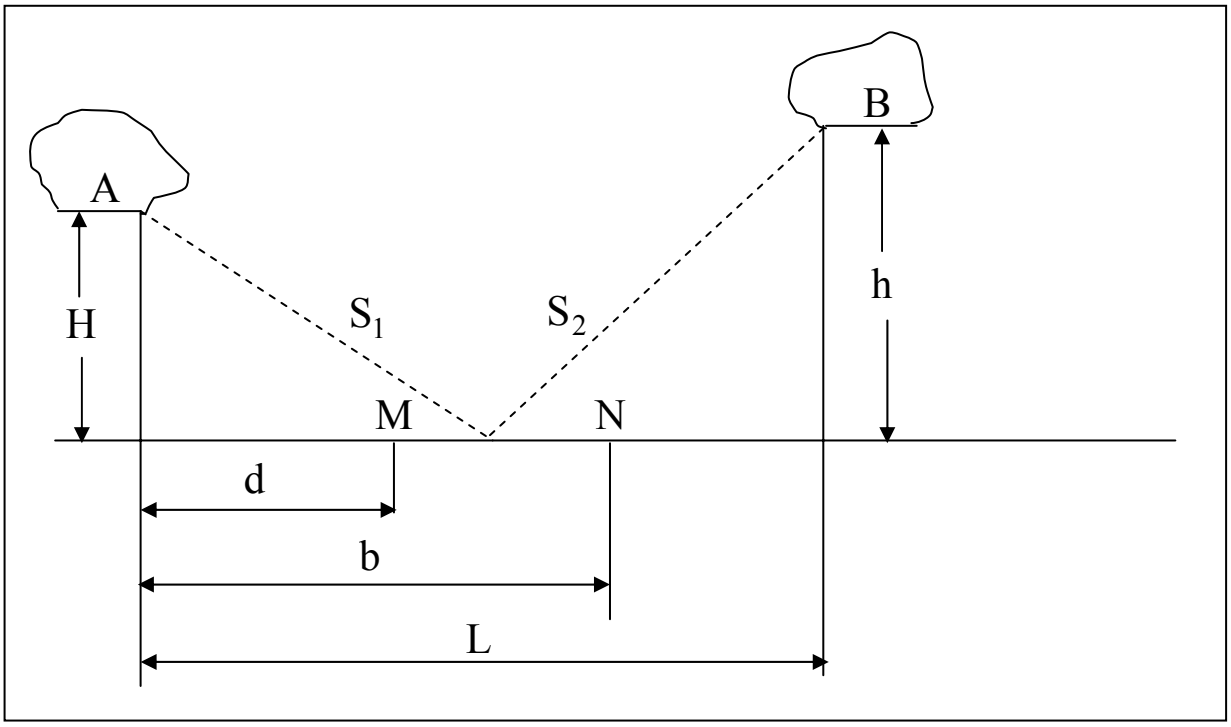
29. $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$;

30. $y = \dfrac{e^2 \cdot \ln x}{x}$.

Задание №17

1-10. Рыбаку нужно переправиться с острова A на остров B (рис.). Чтобы пополнить свои запасы, он должен попасть на участок берега MN. Найти наикратчайший путь рыбака $S = S_1 + S_2$

1. $d = 200,\ b = 300,\ H = 400,\ h = 300,\ L = 700;$
2. $d = 400,\ b = 500,\ H = 800,\ h = 600,\ L = 1400;$
3. $d = 600,\ b = 900,\ H = 1200,\ h = 900,\ L = 2100;$
4. $d = 800,\ b = 1200,\ H = 1600,\ h = 1200,\ L = 2800;$
5. $d = 1000,\ b = 1500,\ H = 2000,\ h = 1500,\ L = 3500;$
6. $d = 400,\ b = 500,\ H = 300,\ h = 400,\ L = 700;$
7. $d = 800,\ b = 1000,\ H = 600,\ h = 800,\ L = 1400;$
8. $d = 1200,\ b = 1500,\ H = 900,\ h = 1200,\ L = 2100;$
9. $d = 1600,\ b = 2000,\ H = 1200,\ h = 1600,\ L = 2800;$
10. $d = 2800,\ b = 2500,\ H = 1500,\ h = 2000,\ L = 3500.$



11-20. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\dfrac{t}{t+K}$-ю часть курса, а забывает $\alpha \cdot t$-ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

11. $K = \dfrac{1}{2};\ \alpha = \dfrac{2}{49};$
12. $K = \dfrac{1}{2};\ \alpha = \dfrac{2}{81};$
16. $K = 1;\ \alpha = \dfrac{1}{16};$
17. $K = 1;\ \alpha = \dfrac{1}{36};$

13. $K=\frac{1}{2};\ \alpha=\frac{2}{121};$ 18. $K=1;\ \alpha=\frac{1}{49};$

14. $K=\frac{1}{2};\ \alpha=\frac{2}{139};$ 19. $K=2;\ \alpha=\frac{1}{18};$

15. $K=1;\ \alpha=\frac{1}{25};$ 20. $K=2;\ \alpha=\frac{2}{49}.$

21-30. Тело массой $m_0=3000$ кг падает с высоты H и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k=100$ кг/с. Считая, что начальная скорость $\vartheta_0=0$, ускорение $g=10$ м/с^2, и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинематическую энергию тела (в кгм^2/с^2).

21. $H=500;$ 26. $H=1125;$

22. $H=605;$ 27. $H=1280;$

23. $H=720;$ 28. $H=1445;$

24. $H=845;$ 29. $H=1620;$

25. $H=980;$ 30. $H=1805.$

Задание № 18

1. Из листового железа изготовить бак цилиндрической формы (без крышки) вместимости V с наименьшей затратой материала. Каковы размеры бака?

2. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

3. Город B стоит на железной дороге, идущей с юга на север. Завод A расположен южнее города B на b км и отстоит от железной дороги на a км. Под каким углом φ к железной дороге следует построить подъездной путь от завода, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза тонны груза на расстояние 1 км по подъездному пути обходится в два раза дороже, чем по железной дороге $\left(b>\frac{a}{2}\right)$?

4. Прямоугольная площадка, примыкающая одной стороной к длинной каменной стене, с трех сторон огорожена железной решеткой. Какова должна быть длина сторон площадки, чтобы она имела наибольшую площадь, если имеется 200 м решетки?

5. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса r.

6. Требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции, а дно и бока имеют ширину по

10 см. Какова должна быть ширина наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

7. Консервная коробка объема V должна иметь цилиндрическую форму с дном и крышкой. Каково должно быть отношение диаметра цилиндра к высоте, чтобы на изготовление коробки пошло наименьшее количество материала?

8. В окружность радиуса r вписан прямоугольник. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

9. Каковы должны быть высота и радиус основания конуса с образующей ℓ, чтобы объем конуса был наибольшим?

10. Прямоугольник вписан в прямоугольный треугольник так, что один из углов прямоугольника совпадает с прямым углом треугольника. Катеты треугольника равны 4 и 8 см. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

11. Бак без крышки с квадратным основанием должен иметь объем V. Каково должно быть отношение стороны основания бака к высоте, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

12. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $9\sqrt{2}$. Каковы должны быть катеты, чтобы периметр треугольника был наибольшим?

13. Из квадратного листа жести со стороной 60 см надо изготовить открытую сверху коробку. Для этой цели по углам листа вырезают равные квадратики и образовавшиеся края загибают кверху. Какого размера следует сделать вырезы, чтобы полученная коробка имела наибольшую вместимость?

14. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V, причем стоимость квадратного метра материала, из которого изготовляется дно бака, равна p_1 руб., а стоимость квадратного метра материала, идущего на стенки, равна p_2 руб. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут наименьшими?

15. В прямоугольной системе координат через точку (1,2. проведена прямая с отрицательным угловым коэффициентом, которая вместе с осями координат образует треугольник. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

16. Из полосы жести шириной 11 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 7 см. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

17. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу основания, чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

18. Из полосы жести шириной 30 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 10 см. Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

19. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на сжатие пропорционально площади этого сечения. каковы должны быть размеры

сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы ее сопротивление на сжатие было наибольшим?

20. Найти отношение радиуса цилиндра к высоте, при котором цилиндр имеет при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

21. Из бревна, имеющего форму усеченного конуса, надо вырезать балку, поперечное сечение которой представляет собой квадрат, а ось совпадает с осью бревна. Найти размеры балки, при которых объем ее будет наибольшим, если диаметр большего основания бревна равен 2 м, диаметр меньшего основания равен 1 м, длина бревна (считая по оси) равна 20 м.

22. Сосуд, состоящий из цилиндра, заканчивающегося книзу полусферой, должен вмещать 18 л воды. Найти размеры сосуда, при которых на его изготовление пойдет наименьшее количество материала.

23. Требуется изготовить из жести ведро объемом V цилиндрической формы без крышки. Найти высоту цилиндра и радиуса его основания, при которых на ведро уйдет наименьшее количество материала.

24. Требуется поставить палатку данного объема V, имеющую форму прямого кругового конуса. Найти отношение высоты конуса к радиусу его основания, при котором на палатку уйдет наименьше количество материала.

25. Через точку $A(2;1)$ провести прямую с отрицательным угловым коэффициентом так, чтобы сумма длин отрезка, отсекаемых ею на осях координат, была наименьшей.

26. Одна сторона прямоугольного участка земли примыкает к берегу канала, а три другие огораживаются забором. Каковы должны быть размеры этого участка, чтобы его площадь равнялась $800\ м^2$, а длина забора была наименьшей?

27. В прямоугольном листе картона длиной 48 см и шириной 30 см вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается открытая прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объем коробки был наименьшим?

28. На прямой между двумя источниками света силы F и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками 24 м. (Освещенность точки обратно пропорциональна расстоянию ее от источника света).

29. На оси параболы $y^2 = 2px$ дана точка M на расстоянии a от ее вершины. Найти абсциссу ближайшей к ней точки кривой.

30. Стоимость плавания судна в течение часа выражается (в рублях) эмпирической формулой вида $a + bv^3$, где a и b – постоянные для данного судна, а v – скорость судна в узлах (узел равен 1,86 км/час). В этой формуле постоянная часть расхода a относится к амортизации и к содержанию команды, а второй член bv^3 – к стоимости топлива. При какой скорости судно покроет любое требуемое расстояние с наименьшими затратами?

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие для вузов/Г.Н.Берман.-22-е изд. перераб.-СПб.: Профессия, 2001.-432с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.–М.: Наука, 2001. -Т.1. – 456 с.

Дополнительная литература:

1. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов/Под ред. А.Н.Тихонова.-2-е изд., стер.-М.:Высш.шк.,2001.-479с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2000 – 108 с.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Наука, 1997. - 576 с.
4. Лукин К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис – Пресс, 2004 – 72 с.

Учебные пособия кафедры:

1. Гимаев Р.Г., Умергалина Т.В. Введение в математический анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной. Учебное пособие – Уфа, Изд-во УГНТУ, 1997. – 71 с.
2. Практикум. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. – Сагитова Р.Г., Хайбуллин Р.Я. - Уфа, Изд-во УГНТУ, 2000.
3. Расчетные задания. Дифференцирование функций одной переменной и некоторые приложения дифференциального исчисления. Степанова М.Ф. – Уфа, Изд-во УГНТУ, 2002.