

Федеральное агентство по образованию

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

А.А. Мицель, Е.А. Ефремова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Учебное пособие

2007

Корректор: Осипова Е.А.

Мицель А.А., Ефремова Е.А.

Математическая экономика: Учебное пособие. — Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2007. — 158 с.

© Мицель А.А., Ефремова Е.А., 2007

© Томский межвузовский центр
дистанционного образования, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
Глава 1. Нарращение и дисконтирование	13
1.1 Фактор времени в количественном анализе финансовых операций.....	13
1.2 Проценты и процентные ставки	15
1.3 Нарращение по простым процентам.....	17
1.4 Понятие дисконтирования	18
1.5 Определение продолжительности ссуды и процентных ставок для простых процентов	19
1.6 Сложные проценты.....	20
1.7 Номинальная и эффективная ставки процентов.....	21
1.8 Дисконтирование по сложной ставке процентов.....	23
1.9 Определение срока и процентных ставок для сложных процентов.....	24
1.10 Учет инфляции при наращении процентов	25
1.11 Непрерывное наращение и дисконтирование (непрерывные проценты)	26
1.12 Эквивалентность процентных ставок.....	28
1.13 Изменения условий контракта	29
Глава 2. Потоки платежей, ренты	33
2.1 Основные определения.....	33
2.2 Нарращенная сумма годовой ренты	35
2.3 Нарращенная сумма годовой ренты с начислением процентов m раз в год.....	37
2.4 Нарращенная сумма p -срочной ренты.....	38
2.5 Нарращенная сумма p -срочной ренты при $p \neq m$, $m \neq 1$	39
2.6 Современная величина обычной ренты	40
2.7 Современная величина годовой ренты с начислением процентов m раз в год.....	42
2.8 Современная величина p -срочной ренты ($m=1$).....	42
2.9 Современная величина p -срочной ренты при $p \neq m$, $m \neq 1$...	43
2.10 Соотношение между наращенной и современной величинами ренты.....	44
2.11 Определение параметров финансовых рент	44
2.12 Анализ переменных потоков платежей.....	46

2.13 Анализ дискретного потока платежей с непрерывным начислением процентов	49
2.14 Непрерывный поток платежей с дискретным начислением процентов	50
2.15 Конверсии рент	52
Глава 3. Кредитные расчеты	56
3.1 Показатель полной доходности финансово-кредитной операции.....	56
3.2 Баланс финансово-кредитной операции.....	57
3.3 Определение полной доходности ссудных операций с удержанием комиссионных	60
3.4 Методы сравнения и анализа коммерческих контрактов....	63
3.5 Планирование погашения долгосрочной задолженности ...	69
Глава 4. Анализ реальных инвестиций.....	77
4.1 Чистый приведенный доход	80
4.2 Внутренняя норма доходности.....	84
4.3 Срок окупаемости	85
4.4 Индекс рентабельности	87
4.5 Модель инвестиций в человеческий капитал	88
Глава 5. Количественный финансовый анализ ценных бумаг с фиксированным доходом.....	90
5.1 Определение полной доходности облигаций	91
5.2 Доходность портфеля облигаций.....	96
5.3 Оценивание облигаций. Базовая модель оценивания облигаций.....	96
5.4 Формулы для оценивания облигаций	99
5.5 Оценка риска, связанного с вложениями в облигации	101
Глава 6. Финансовый анализ рискованных ценных бумаг (обыкновенные акции)	105
6.1 Общая модель оценки.....	105
6.2 Модель нулевого роста.....	106
6.3 Модель постоянного роста.....	107
6.4 Модели переменного роста.....	108
6.5 Оценка с учетом конечного срока владения акцией.....	109
Глава 7. Влияние фактора неопределенности на экономические расчеты	110

7.1 Плавающая ставка процента.....	110
7.2 Случайные потоки платежей	112
7.3 Рисковые инвестиционные процессы.....	114
7.4 Подсчет доходности вероятностных операций в условиях неопределенности	115
7.5 Общее понятие детерминированного эквивалента финансового показателя	116
Глава 8. Оптимизация портфеля ценных бумаг	118
8.1 Проблема выбора инвестиционного портфеля.....	118
8.2 Оптимизация портфеля рискованных ценных бумаг	124
8.3 Оптимизация портфеля при возможности безрисковых вложений	128
8.4 Оценка вклада ценной бумаги в общую ожидаемую эффективность портфеля.....	131
8.5 Модель ценообразования на конкурентном финансовом рынке	132
8.6 Статистический анализ финансового рынка	134
Глава 9. Общие методы уменьшений рисков	138
9.1 Диверсификация	138
9.2 Хеджирование	140
9.3 Страхование.....	142
9.4 Качественное управление рисками.....	143
9.5 Форвардная и фьючерсная торговля.....	146
9.6 Опционы	147
Глава 10. Методические указания по выполнению лабораторных работ	151
Литература	158

ВВЕДЕНИЕ

Экономико-математические методы и моделирование экономических процессов

Термин экономико-математические методы понимается как обобщающее название комплекса экономических и математических научных дисциплин, объединенных для изучения социально-экономических систем и процессов.

Под *социально-экономической системой* будем понимать сложную вероятностную динамическую систему, охватывающую процессы производства, обмена, распределения и потребления материальных и других благ.

Основным методом исследования систем и процессов является *метод моделирования*, т.е. способ теоретического анализа и практического действия, направленный на разработку и использование моделей. При этом под моделью будем понимать образ реального объекта (процесса) в материальной или идеальной форме (т.е. описанный знаковыми средствами на каком-либо языке), отражающий существенные свойства моделируемого объекта (процесса) и замещающий его в ходе исследования и управления. В дальнейшем мы будем говорить только об экономико-математическом моделировании, т.е. об описании знаковыми математическими средствами социально-экономических систем. Практическими задачами экономико-математического моделирования являются:

- анализ экономических объектов и процессов;
- прогнозирование развития экономических процессов;
- выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Важным разделом экономико-математического моделирования является также количественный анализ финансовых операций. Появилась новая дисциплина — *финансовая математика*.

Следует, однако, иметь в виду, что далеко не во всех случаях данные, полученные в результате экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно как готовые управленческие решения. Они скорее могут быть рассмотрены как «консультирующие» (советующие) средства. Принятие управленческих решений остается за человеком. Таким образом,

экономико-математическое моделирование является лишь одним из компонентов (пусть очень важным) в человеко-машинных системах планирования и управления экономическими системами.

В наше время экономико-математическое моделирование применяют к широкому классу задач, связанному со сложными организационными структурами современной экономики. Наша естественная склонность ставить и решать подобные задачи проявляется в выражениях типа «с наименьшими затратами», «максимальная прибыль», «полная отдача» и т.п. Сюда относятся задачи наиболее эффективного управления предприятием, распределения ресурсов, управления технологическими процессами, создания оптимальных конструкций, управления грузопотоками, персоналом и многие другие.

Эти задачи возникают не только в промышленности, но и в повседневной жизни каждого человека. Например, задача программирования утреннего одевания. Следует выбрать такой вариант последовательности одевания — программу, которая позволит выполнить определенные ограничения или общепринятые правила. Если программа включает шесть предметов одежды: ботинки, носки, брюки, рубашку, галстук, пиджак, — то программа — любой порядок, в котором можно надеть эти предметы. Всего в этом случае существует $6! = 720$ различных программ. Многие из них недопустимы (носки поверх ботинок, галстук под рубашку), и если их отбросить, все равно остается несколько допустимых программ, которые нужно исследовать. Как же выбрать окончательное, оптимальное решение?

В этой или любой другой задаче, где необходимо анализировать все возможные варианты решений и выбрать единственный оптимальный, имеется некая основная цель (целевая функция, критерий качества), позволяющая сравнивать эффективность этих допустимых вариантов (программ действий). Если мы можем указать целевую функцию, то тем самым можем выбрать и оптимальную программу действий. Если целевая функция связана с затратами времени, то оптимальная программа утреннего одевания: носки, рубашка, брюки, галстук, ботинки, пиджак — минимизирует время на одевание без нарушения общепринятых ограничений. Но может быть выбрана и другая целевая функция,

например минимизация утреннего шума, — как можно меньше открывать и закрывать дверцы и шкафчики. Тогда будет и другое оптимальное решение.

Неоптимальное решение этих задач приводит к излишним затратам сырья и времени. Допустим, что при интуитивном распределении людей на работы эффективность их использования по сравнению с оптимальным вариантом, рассчитанным на компьютере, ухудшается всего на 3 %. Казалось бы, очень небольшая погрешность, на которую можно и не обратить внимания. Такая погрешность означала бы, например, в гончарном цехе прошлых веков с 30-ю работниками неполную загрузку в течение рабочего дня всего лишь одного из них. А в наши дни, если принять число занятых в народном хозяйстве 60 млн. человек, такая же погрешность может явиться причиной сокращения числа рабочих мест почти для 2 млн. человек.

Финансовая математика

Основная цель науки о финансах состоит в изучении того, как экономические агенты (лица и учреждения) распределяют ограниченные ресурсы во времени. Акцент именно *на временном*, а не на других видах распределения, изучаемых в экономике (по регионам, отраслям, предприятиям), является отличительной чертой финансовой науки. Решения, принимаемые лицами по поводу временного распределения ресурсов, представляют собой *финансовые решения*. С точки зрения лица или лиц, принимающих такие решения, распределяемые ресурсы относятся либо к расходам (затратам), либо к доходам (поступлениям). Финансовые решения основываются на соизмерении стоимостей потоков расходов и доходов. В термине «поток» отражается временной характер распределения средств. Проблемы, касающиеся временного распределения ресурсов (в самом широком смысле), являются *финансовыми проблемами*.

Поскольку решение финансовых проблем подразумевает *соизмерение стоимостей затрат* (расходов) и *результатов* (доходов), то предполагается наличие некоторой общей меры для оценки стоимости (ценности) распределяемых ресурсов. На практике стоимость ресурсов (активов) измеряется в тех или иных денежных единицах. Но это только один аспект проблемы, другой

касается учета *фактора времени*. Если проблема временного распределения ресурсов — отличительная характеристика финансовых проблем, то финансовая теория должна давать средства для соизмерения ценностей, относящихся к разным моментам времени. Этот аспект проблемы имеет афористичное выражение «время — деньги». Рубль, доллар и т.д. сегодня и завтра имеют разные стоимости.

Кроме того, существует еще один чрезвычайно важный аспект. Во всех реальных финансовых проблемах, с которыми приходится сталкиваться на практике, присутствует *неопределенность*, касающаяся как величины *будущих расходов и доходов*, так и моментов времени, к которым они относятся. Именно тот факт, что финансовые проблемы связаны со временем, и обуславливает присущую им неопределенность. Говоря о неопределенности, имеем в виду, конечно, неопределенность будущего, а не прошлого. Неопределенность прошлого связана обычно (по крайней мере, в финансовых проблемах) с недостатком информации и в этом смысле, в принципе, устранима по мере накопления и уточнения данных, тогда как неопределенность будущего принципиально неустранима. Эта неопределенность, присущая финансовым проблемам, приводит к ситуации риска при их решении. Любое решение по поводу финансовых проблем в силу неопределенности может привести к результатам, отличающимся от ожидаемых, сколь бы тщательным и продуманным ни было это решение.

Финансовая теория разрабатывает понятия и методы для решения финансовых проблем. Как и любая другая теория, она строит *модели реальных финансовых процессов*. Поскольку такие основные элементы, как время, стоимость, риск, а также критерии для выбора желаемого распределения ресурсов получают количественное выражение, то эти модели по необходимости носят характер *математических моделей*. Большинство моделей, изучаемых в современной финансовой теории, имеют ярко выраженный математический характер. При этом математические средства, используемые для построения и анализа финансовых моделей, варьируются от элементарной алгебры до весьма сложных разделов случайных процессов, оптимального управления и др.

Хотя, как было сказано, неопределенность и риск — неотъемлемые характеристики финансовых проблем, в ряде случаев ими можно пренебречь либо в силу стабильности условий, в которых принимается решение, либо в идеализированных ситуациях, когда рассматриваемая модель в силу ее специфики игнорирует наличие тех или иных видов рисков. Финансовые модели такого рода называют моделями с полной информацией, детерминированными моделями и т.п. Изучение таких моделей важно по двум обстоятельствам.

Во-первых, в ряде случаев эти модели вполне пригодны для прямого использования. Это касается, например, большинства моделей классической финансовой математики, посвященной моделям простейших финансовых операций, таких, как банковский депозит, вексельная сделка и т.п.

Во-вторых, одним из способов изучения моделей в условиях неопределенности является моделирование, т.е. анализ возможных будущих ситуаций или сценариев. Каждому сценарию соответствует некоторый, уже вполне определенный, будущий «ход событий». Анализ этого сценария осуществляется, естественно, в рамках детерминированной модели. Затем на основе проведенного анализа различных вариантов развития событий принимается общее решение.

Классификация экономико-математических моделей

Выделяют следующие признаки классификации, или классификационные рубрики.

По общему целевому назначению экономико-математические модели делятся на теоретико-аналитические, используемые при изучении общих свойств и закономерностей экономических процессов, и прикладные, применяемые в решении конкретных экономических задач анализа, прогнозирования и управления. Различные типы прикладных экономико-математических моделей как раз и рассматриваются в данном учебном пособии.

По степени агрегирования объектов моделирования модели разделяются на макроэкономические и микроэкономические. Хотя между ними и нет четкого разграничения, к первым из них относят модели, отражающие функционирование экономики как единого целого, в то время как микроэкономические модели свя-

заны, как правило, с такими звеньями экономики, как предприятия и фирмы.

По конкретному предназначению, т.е. по цели создания и применения, выделяют балансовые модели, выражающие требование соответствия наличия ресурсов и их использования; трендовые модели, в которых развитие моделируемой экономической системы отражается через тренд (длительную тенденцию) ее основных показателей; оптимизационные модели, предназначенные для выбора наилучшего варианта из определенного числа вариантов производства, распределения или потребления; имитационные модели, предназначенные для использования в процессе машинной имитации изучаемых систем или процессов, и др.

По типу информации, используемой в модели, экономико-математические модели делятся на аналитические, построенные на априорной информации, и идентифицируемые, построенные на апостериорной информации.

По учету фактора времени модели подразделяются на статические, в которых все зависимости отнесены к одному моменту времени, и динамические, описывающие экономические системы в развитии.

По учету фактора неопределенности модели распадаются на детерминированные, если в них результаты на выходе однозначно определяются управляющими воздействиями, и стохастические (вероятностные), если при задании на входе модели определенной совокупности значений на ее выходе могут получаться различные результаты в зависимости от действия случайного фактора.

Экономико-математические модели могут классифицироваться также *по типу математического аппарата*, используемого в модели. По этому признаку могут быть выделены матричные модели, модели линейного и нелинейного программирования, корреляционно-регрессионные модели, модели теории массового обслуживания, модели сетевого планирования и управления, модели теории игр и т.д.

Наконец, *по типу подхода к изучаемым социально-экономическим системам* выделяют дескриптивные и нормативные модели. При дескриптивном (описательном) подходе получают модели, предназначенные для описания и объяснения

фактически наблюдаемых явлений или для прогноза этих явлений; в качестве примера дескриптивных моделей можно привести названные ранее балансовые и трендовые модели. При нормативном подходе интересуются не тем, каким образом устроена и развивается экономическая система, а как она должна быть устроена и как должна действовать в смысле определенных критериев. В частности, все оптимизационные модели относятся к типу нормативных; другим примером могут служить нормативные модели уровня жизни.

Рассмотрим в качестве примера экономико-математическую модель межотраслевого баланса (ЭММ МОБ). С учетом приведенных выше классификационных рубрик это прикладная, макроэкономическая, дескриптивная, детерминированная, балансовая, матричная модель; при этом существуют как статические, так и динамические ЭММ МОБ.

Глава 1. НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ

1.1 Фактор времени в количественном анализе финансовых операций

Основными элементами финансовых моделей являются *время и деньги*. В сущности, *финансовые модели* в той или иной мере *отражают количественные соотношения между денежными суммами, относящимися к различным моментам времени*. Тот факт, что со временем стоимость или, лучше сказать, ценность (value) денег изменяется, сейчас, благодаря постоянной инфляции, очевиден каждому. Рубль сегодня и рубль завтра, через неделю, месяц, год — это разные вещи. Возможно, менее очевидно, по крайней мере для неэкономиста, что и при отсутствии инфляции фактор времени тем не менее влияет на ценность денег.

Допустим, что, обладая некоторой «свободной» суммой, вы решаете положить ее на срочный вклад в банк под определенный процент. Со временем сумма вашего счета в банке растет, и в конце срока при благоприятных условиях вы получаете большую сумму, нежели та, что положили вначале. Вместо депозита в банке вы могли бы купить акции или облигации какой-либо компании, которые также могут принести вам по прошествии некоторого времени определенный доход. Таким образом, и в этом случае сумма, инвестируемая вначале, превращается в большую сумму за некоторый промежуток времени. Конечно, вы можете ничего не предпринимать и просто хранить деньги дома или в сейфе в банке. В этом случае их сумма не изменится. Не изменится и реальная стоимость, если нет инфляции. В противном случае она, конечно, уменьшится. Однако, обладая, по крайней мере в принципе, возможностью инвестировать и не делая этого, с точки зрения экономиста, вы поступаете неразумно и несете вполне реальный в экономическом смысле убыток. Этот убыток носит название *вмененных издержек или упущенной выгоды*. Таким образом, наивная точка зрения отличается от экономической. Считая (в отсутствие инфляции) сумму денег, хранящуюся в сейфе, не теряющей стоимости, вы, с точки зрения экономиста, оши-

баются. И в этом случае ценность денег со временем также изменяется.

Конечно, «экономический» подход предполагает наличие каких-либо механизмов по «управлению стоимостью» денег. В современном обществе он реализуется наличием инвестиционного, в частности финансового, рынка. Банки, страховые компании, инвестиционные фонды, брокерские фирмы предоставляют широкий спектр активов, покупка которых ведет (часто, но не всегда) к увеличению стоимости вложенного капитала. Накопление стоимости инвестированного капитала задает «процесс преобразования» стоимости денег во времени. Так, рубль, инвестированный сегодня, превращается в два рубля через несколько лет, с другой стороны, будущие суммы имеют с точки зрения текущего (сегодняшнего) момента меньшую стоимость, хотя бы потому, что для получения их в будущем достаточно инвестировать сегодня меньшую сумму.

Подытоживая, можно сформулировать общий финансовый принцип, определяющий влияние времени на стоимость денег: *одна и та же сумма денег в различные моменты времени имеет различную ценность. С другой стороны, по отношению к определенным условиям разные суммы денег в различные моменты времени могут быть равноценными в финансово-экономическом смысле.*

Необходимость учёта фактора времени выражается в виде **принципа неравноценности денег**, относящихся к различным моментам времени. Неравноценность двух одинаковых денежных сумм определяется тем, что любая сумма денег может быть инвестирована и принести доход. Поступивший доход может быть реинвестирован и т.д.

Следствием принципа неравноценности является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени при анализе финансовых операций.

Учёт фактора времени основан на фундаментальном в финансовом анализе **принципе дисконтирования платежей и потоков платежей**. Понятие дисконтирования, в свою очередь, связано с понятиями процентов и процентных ставок.

1.2 Проценты и процентные ставки

Под процентными деньгами или процентами понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме, а именно: выдача денежных ссуд, продажа в кредит, помещение денег на сберегательный счёт, покупка облигаций и т.д.

При заключении финансового соглашения стороны договариваются о размере процентной ставки.

Под процентной ставкой понимают отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный промежуток времени, к величине ссуды.

Пусть P — первоначальная сумма денег (ссуда); S — сумма денег через некоторый интервал времени (например, год); r — ставка процентов.

Тогда сумма процентных денег равна $(S - P)$, а процентная ставка

$$r = \frac{S - P}{P}.$$

Здесь r определяется в виде десятичной дроби. Чтобы выразить ставку в процентах, необходимо умножить ее на 100.

Рассмотрим простой пример. Пусть инвестор кладет в банк на год сумму 500 рублей под 8 % годовых. Это значит, что в конце года инвестор кроме вложенных денег получит добавочную сумму I , называемую процентами по вкладу, составляющую

$$I = 500 \cdot 0,08 = 40 \text{ руб.}$$

Интервал, относительно которого определяется процентная ставка, называют *периодом начисления*. Это может быть год, полугодие, месяц, день и т.д. Ставка выражается в процентах или в виде десятичной или обыкновенной дроби. Заметим, что процент также является *интервальной* характеристикой, т.е. соотносится с периодом сделки.

Процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов к первоначальной сумме называется **наращением** или **ростом первоначальной суммы**.

Первоначальная сумма с начисленными на нее процентами называется **наращенной суммой**.

Пример 1.1. Пусть в момент времени t_0 выдан кредит на сумму $P = 5000$ сроком на $T = 2$ года, по истечении которых кредитор должен получить $S = 10000$. Найти процентную ставку сделки.

Решение.

$$r = \frac{10000 - 5000}{5000} = 1, \text{ т.е. } r = 100\%.$$

Пример 1.2. Рассматривается кредитная сделка, состоящая в выдаче 2000 руб. на срок 3 года. Найти сумму погашения долга, если процентная ставка составляет 60 %.

Решение. $S = 2000 \cdot (1 + 0,6) = 3200(\text{Р})$.

Ставка r , определенная выше, относится ко всему периоду сделки. На практике наиболее часто используется другой вид процентной ставки, относящийся к некоторому выбранному *базовому промежутку* времени — это обычно год. Выбор базового промежутка позволяет нормировать процентную ставку сделки по формуле

$$i = \frac{r}{T},$$

где T — период (срок) сделки, выраженный в единицах базового периода (год, месяц и т.д.). В дальнейшем мы будем оперировать именно с нормированной процентной ставкой.

Существуют различные способы начисления процентов. Соответственно, применяют различные виды процентных ставок. Основное отличие связано с выбором исходной суммы (базы) для начисления. В связи с этим различают **простые** и **сложные проценты**. При начислении простых процентов базой для начисления служит начальная сумма на протяжении всего срока ссуды. При начислении сложных процентов базой служит сумма с начисленными в предыдущем периоде процентами.

В финансовом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращивания суммы долга, но и в более широком смысле, а именно как универсальный показатель степени доходности любой финансовой операции.

1.3 Нарращение по простым процентам

По определению, наращенная сумма — это первоначальная сумма с начисленными на эту сумму процентами. Введем следующие обозначения. Пусть

I — сумма процентов за весь срок;

n — общее количество периодов начисления (обычно в годах);

P — первоначальная сумма;

S — наращенная сумма;

i — ставка процентов в виде десятичной дроби.

Тогда имеем

$$S = P + I .$$

При начислении простых процентов за базу принимается первоначальная сумма. Проценты начисляются n раз, поэтому $I = P \cdot n \cdot i$ и формула простых процентов запишется в виде

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i) . \quad (1.1)$$

Величина $(1 + n \cdot i)$ называется **множителем наращенния** по простым процентам.

Из данной формулы видно, что наращенная сумма линейно зависит от срока — переменной n . Простые проценты чаще всего используются, когда срок ссуды меньше одного года. Тогда

$n = \frac{t}{K}$, где t — количество дней ссуды, а K — количество дней в году.

На практике используют обыкновенный или коммерческий процент, когда $K = 360$ дней, или точный процент — $K = 365$ (366) дней.

Пример 1.3. Пусть $P = 1000$ руб., годовая ставка $i = 10\%$. Получим наращенные по простым процентам суммы.

1 год: $1000 + 0,1 \cdot 1000 = 1100$ руб.;

2 год: $1100 + 100 = 1200$ руб.;

3 год: $1200 + 100 = 1300$ руб.

Переменные ставки

Предположим, что весь срок ссуды n разбит на s промежутков длительностью n_t каждый, $n = \sum_{t=1}^s n_t$. В каждом промежутке действует ставка i_t . Тогда формула начисления простых процентов при переменной ставке будет иметь вид

$$S = P \cdot (1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + \dots + n_s \cdot i_s)$$

или

$$S = P \cdot (1 + \sum_{t=1}^s n_t \cdot i_t).$$

Пример 1.4. Пусть $P = 1000$ руб., ставка в первый год равна $i_1 = 10\%$, во второй год — $i_2 = 12\%$, в третий год — $i_3 = 15\%$. Получим наращенную за три года по простым процентам сумму.
 $1000 + 100 + 120 + 150 = 1370$ руб.

Реинвестирование

Когда происходит реинвестирование наращенных на каждом промежутке средств, то за базу при начислении процентов на очередном промежутке принимается не первоначальная сумма, а наращенная сумма, полученная на предыдущем промежутке. С учетом этого формула начисления запишется так

$$S = P \cdot (1 + n_1 \cdot i_1) \cdot (1 + n_2 \cdot i_2) \cdot \dots \cdot (1 + n_s \cdot i_s).$$

Пример 1.5. Для данных примера 1.3 получим за три года сумму

1 год: $1000 + 100 = 1100$ руб.;

2 год: $1100 + 110 = 1210$ руб.;

3 год: $1210 + 121 = 1331$ руб.

1.4 Понятие дисконтирования

Дисконтирование по простым ставкам

Рассмотрим следующую задачу. По заданной сумме S , которую следует уплатить через время n , требуется определить первоначальную сумму P . В этом случае говорят, что сумма S дисконтируется.

Термин «дисконтирование» в широком смысле означает определение стоимости денежной суммы в данный момент времени при условии, что в будущем она составит величину S . Такой расчёт называется приведением стоимостного показателя к заданному моменту времени.

Величину P , найденную дисконтированием суммы S , называют современной или приведённой величиной S .

Это одно из важнейших понятий при моделировании и анализе финансовых операций, так как именно с помощью дисконтирования учитывается фактор времени. Решая задачу, получим

$$P = S \frac{1}{1 + n \cdot i}.$$

Данная формула называется **формулой математического дисконтирования** (в отличие от банковского дисконтирования или учета, которое здесь не рассматривается).

Величина $\frac{1}{1 + n \cdot i}$ называется **дисконтным множителем**, разность $(S - P)$ — **дисконтом** суммы S .

Более подробно понятие дисконтирования будет рассмотрено в следующих разделах.

1.5 Определение продолжительности ссуды и процентных ставок для простых процентов

Рассмотрим следующие две задачи, возникающие в связи с понятием процентов и имеющие практический смысл.

Задача 1 Известны P, S, i . Определить срок n . Задача решается просто: из формулы (1.1) получим

$$n = \frac{S - P}{P \cdot i}. \quad (1.2)$$

Задача 2. Известны P, S, n . Определить i . Ставка равна

$$i = \frac{S - P}{P \cdot n}. \quad (1.3)$$

Пример 1.6. Годовая ставка простых процентов равна 12,5 %. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Решение. Надо решить неравенство: $(1+0,125 \cdot n) > 2$, т.е. $0,125n > 1$. Получаем $n > 1/0,125$.

Ответ: через 8 лет.

1.6 Сложные проценты

Начисление сложных годовых процентов (формула наращенного)

В долгосрочных финансовых операциях для наращивания первоначальной суммы применяют сложные проценты. При начислении сложных процентов за базу принимают не первоначальную сумму, а сумму, получившуюся после начисления процентов и присоединения их к сумме долга в предыдущих периодах.

Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их начисления, называют **капитализацией процентов**. Процесс капитализации происходит по следующей схеме:

$$P + P \cdot i = P(1+i) \rightarrow P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2 \rightarrow P(1+i)^2 + P(1+i)^2 \cdot i = P(1+i)^3 \rightarrow \dots$$

В общем виде формула наращивания по сложным процентам запишется так:

$$S = P(1+i)^n.$$

Множитель $(1+i)^n$ называется **множителем наращивания по формуле сложных процентов**.

Пример 1.7. Пусть $P = 1000$, $i = 10\%$, т.е. как доля $i = 0,1$. Следовательно, наращенные по сложным процентам суммы таковы:

$$1000, 1000+0,1 \cdot 1000=1000+100=1100, 1100+0,1 \cdot 1100=1210, \\ 1210+0,1 \cdot 1210 = 1331,1 \text{ и т.д.}$$

Пример 1.8. Годовая ставка сложных процентов равна 8% . Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Решение. Надо решить неравенство: $(1+0,08)^n > 2$. Логарифмируем по основанию натуральных логарифмов и получаем $n > \ln(2)/\ln(1,08)$.

Ответ: через 9 лет.

Соотношение множителей наращения по простым и сложным процентам

Если срок $n < 1$, то множитель наращения по простым процентам $(1 + n \cdot i) > (1 + i)^n$, если $n > 1$, то $(1 + n \cdot i) < (1 + i)^n$. Кривые, изображенные на рис. 1.1, иллюстрируют процессы наращения по простым и сложным процентам в зависимости от срока.

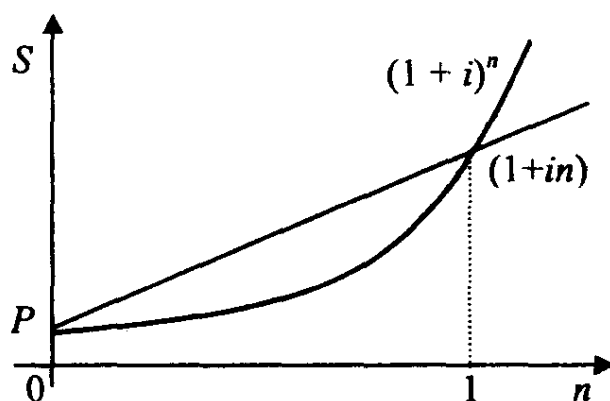


Рис. 1.1

Меняющиеся во времени ставки

Пусть весь срок ссуды n разбит на интервалы длительностью n_t , $t = 1, 2, \dots, s$, $n = \sum_{t=1}^s n_t$ и в каждом интервале начисление процентов производится по ставкам $i_1, i_2, \dots, i_s$ соответственно. Тогда формула наращения по сложным процентам будет иметь вид

$$S = P(1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_s)^{n_s}.$$

1.7 Номинальная и эффективная ставки процентов

Номинальная ставка

На практике часто при объявлении условий финансовой операции оговаривается годовая ставка процентов и указывается количество выплат процентов в год (например, может быть ежеквартальное начисление — четыре раза в год). В этом случае используют понятие номинальной ставки, обозначим ее символом

j . Пусть количество выплат процентов в год равно m . Тогда начисление процентов осуществляется по ставке j/m , а общее количество интервалов выплат за n лет будет равно $m \cdot n$. Нарастенная сумма определяется по формуле

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

Таким образом, **номинальная ставка** — это годовая ставка процентов при начислении процентов m раз в год. Чем больше число m , тем быстрее идет процесс наращивания первоначальной суммы.

Эффективная ставка

Для сравнения различных условий начисления процентов (при различных номинальных ставках и различном количестве начислений) используют понятие эффективной ставки. **Эффективная ставка** — это годовая ставка процентов, начисляемых один раз в год, которая дает тот же финансовый результат, что и m -разовое начисление в год с использованием номинальной ставки j . Таким образом, по определению, должно выполняться равенство множителей наращивания

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m, \quad (1.4)$$

где i — эффективная ставка. Отсюда получаем

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1. \quad (1.5)$$

Замена в договоре номинальной ставки j при начислении процентов m раз в год на эффективную ставку по формуле (1.5) не меняет финансовых обязательств сторон.

При сравнении различных предлагаемых вариантов начисления процентов достаточно вычислить и сравнить эффективные ставки для каждого из них.

Пример 1.9. Банк начисляет проценты, исходя из номинальной ставки $j = 12\%$ годовых. Вычислить эффективную ставку i , если проценты начисляются: а) ежедневно ($m = 365$); б) ежемесячно ($m = 12$); в) ежеквартально ($m = 4$). Расчеты по формуле (1.5)

дают следующие результаты: при ежедневном начислении $i = 0,1274$; при ежемесячном $i = 0,1268$; при ежеквартальном $i = 0,1255$.

Если задана эффективная ставка i , то по формуле (1.4) можно определить номинальную ставку j при количестве выплат m :

$$j = m \cdot ((1 + i)^{1/m} - 1). \quad (1.6)$$

Пример 1.7. Пусть эффективная годовая ставка $i = 12\%$. Определить номинальную ставку j , если проценты начисляются: а) ежедневно ($m = 365$); б) ежемесячно ($m = 12$); в) ежеквартально ($m = 4$).

Решение. По формуле (1.6) получим следующие результаты: при ежедневном начислении $j = 0,1133$; при ежемесячном $j = 0,1139$; при ежеквартальном $j = 0,1149$.

1.8 Дисконтирование по сложной ставке процентов

Задача. Зная сумму S , которая может быть получена через n лет при начислении процентов по годовой ставке i , определить первоначальную сумму P .

Очевидно, что

$$P = \frac{S}{(1 + i)^n} = S \cdot v^n, \quad (1.7)$$

где $v^n = \frac{1}{(1 + i)^n}$ — дисконтный множитель (множитель дисконтирования).

Если проценты начисляются m раз в год с использованием номинальной ставки j , то

$$P = \frac{S}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}} = S \cdot w^{m \cdot n}, \quad (1.8)$$

где дисконтный множитель $w^{m \cdot n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}}$.

Величина P называется **современной** или **приведенной величиной суммы** S . В финансовой и экономической литературе

для современной величины часто используют сокращенное обозначение — PV, от английского Present Value.

Очевидно, математически данная задача решается элементарно, однако она имеет глубокий финансово-экономический смысл. Как уже отмечалось выше, с помощью дисконтирования определяется современная стоимость будущих денежных сумм. Платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P , выплачиваемой в настоящий момент времени. При этом важнейшим является вопрос о выборе ставки процентов, по которой производится дисконтирование. Подробное обсуждение этого вопроса содержится в последующих главах, посвященных анализу инвестиций. Здесь отметим лишь, что выбор этой ставки основывается на анализе состояния финансового рынка и от ее правильного выбора зависит точность оценки современной стоимости будущих денежных сумм.

Разность $S - P$ называется дисконтом суммы S , обозначим эту величину символом D . Из формул (1.7) и (1.8) следует, что $D = S(1 - v^n)$, если проценты начисляются один раз в год, и $D = S(1 - w^{m \cdot n})$, если проценты начисляются m раз в год.

Покажем, что наращенная сумма на некоторый промежуточный момент времени $0 < t < n$ равна современной величине платежа на тот же момент времени. Пусть S_t — наращенная сумма на момент времени t , а P_t — современная величина платежа на этот момент. Тогда очевидно, что

$$P_t = \frac{S}{(1+i)^{n-t}} = \frac{P(1+i)^n}{(1+i)^{n-t}} = P(1+i)^t = S_t.$$

1.9 Определение срока и процентных ставок для сложных процентов

В этом разделе рассмотрим две задачи, возникающие в связи с понятием сложных процентов и имеющих практический смысл.

Задача 1. Известны значения P, S, i . Определить срок n . Срок находится из уравнения

$$S = P(1+i)^n. \quad (1.9)$$

Решая уравнение (1.7) относительно n , получим

$$n = \frac{\ln(S/P)}{\ln(1+i)}. \quad (1.10)$$

Если используется номинальная ставка J с начислением процентов m раз в год, то аналогично получим

$$n = \frac{\ln(S/P)}{\ln(1 + \frac{j}{m})^m}. \quad (1.11)$$

(Напомним свойство степенной функции, которое использовалось при выводе формул (1.10), (1.11): $\ln(b^n) = n \cdot \ln(b)$.)

Задача 2. Известны значения P, S, n . Определить ставку i . Решая уравнение (1.9) относительно i , получим

$$i = (S/P)^{1/n} - 1.$$

При начислении процентов по номинальной ставке m раз в год имеем

$$j = m \cdot ((S/P)^{1/m \cdot n} - 1).$$

1.10 Учет инфляции при наращении процентов

Существует множество различных способов учета инфляции при наращении сложных процентов. Рассмотрим один из них, основанный на применении *формулы Фишера*. Пусть h — ожидаемый годовой темп инфляции в виде ставки сложных процентов (мы не касаемся здесь методики определения этого показателя), i — ставка процентов без учета инфляции, r — реальная ставка с учетом инфляции. Тогда реальная ставка определяется из уравнения, которое называется уравнением Фишера:

$$1 + r = \frac{1 + i}{1 + h}.$$

Решая это уравнение относительно r , получим

$$r = \frac{i - h}{1 + h}.$$

Ставка без учета инфляции (которую называют также номинальной ставкой) $i = r + h + r \cdot h$. При малых значениях h используют приближенную формулу $i = r + h$, а для реальной ставки: $r = i - h$.

1.11 Непрерывное наращение и дисконтирование (непрерывные проценты)

Непрерывные проценты применяются в количественном анализе финансовых операций, моделировании сложных производственных и хозяйственных объектов, при выборе инвестиционных решений и их обосновании. Это обусловлено тем, что многие экономические процессы непрерывны, и поэтому более адекватно применение непрерывных процентов. Модели с непрерывными процентами широко используются в современной финансовой математике при описании доходностей ценных бумаг. С помощью непрерывных процентов можно учесть сложные процессы наращения, часто изменяющиеся процентные ставки, что характерно для финансовых рынков. Непрерывные проценты используются при моделировании финансовых потоков. Несмотря на кажущуюся абстрактность этого понятия, непрерывные проценты используются и в практике финансовых компаний.

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки, которая называется силой роста. Она характеризует относительный прирост наращенной суммы в бесконечно малом промежутке времени.

Постоянная сила роста

Рассмотрим формулу $S = P(1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n}$. Очевидно, что при непрерывном начислении процентов $m \rightarrow \infty$. Имеем

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} P(1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n} = P \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n}.$$

Из математического анализа известно, что $\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{j}{m})^m = e^j$, где e — основание натурального логарифма. Учитывая это, получим

$$S = P \cdot e^{\delta \cdot n}. \quad (1.10)$$

В данной формуле δ — сила роста — номинальная ставка при $m \rightarrow \infty$.

Если известна сила роста, то можно определить эквивалентную ей дискретную годовую ставку. По существу, это эффектив-

ная ставка, соответствующая данной непрерывной ставке. Приравнявая множители наращения по дискретной и непрерывной ставкам

$$(1+i) = e^{\delta},$$

получим

$$i = e^{\delta} - 1.$$

Если известна дискретная годовая ставка, то можно определить эквивалентную ей непрерывную ставку:

$$\delta = \ln(1+i).$$

Приведем пример реальной ситуации, в которой для привлечения вкладчиков применялись непрерывные проценты. В 1975 г. в США законы налагали ограничения на фиксированную годовую ставку выплат, но не налагали ограничений на количество периодов начислений в год. Ставка процентных выплат по займам и депозитам сроком от шести до десяти лет была ограничена уровнем 7,75 % годовых. В целях привлечения вкладчиков некоторые финансовые учреждения объявили, что они будут выплачивать 7,75 % годовых, но начислять проценты по полугодиям, что соответствовало эффективной ставке 7,9 % (см. формулу (1.5) в лекции 2). Это не являлось нарушением закона.

После этого другие учреждения предложили более выгодные условия, а именно 7,75 % годовых, но при ежеквартальном начислении процентов. Это соответствовало эффективной ставке 7,978 %. Другие предложили при той же годовой ставке начислять проценты ежемесячно, что дало эффективную ставку 8,031 %. Предел был достигнут, когда одна компания предложила начислять проценты непрерывно (ежедневно), что соответствовало эффективной ставке 8,06 %.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок

Формула дисконтирования по непрерывной ставке имеет вид

$$P = S \cdot e^{-\delta \cdot n}.$$

Переменная сила роста

Пусть сила роста меняется во времени и принимает значения $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ в интервалах времени $n_1, n_2, \dots, n_k$. Тогда за n_1 лет первоначальная сумма P станет равна $S_1 = P \cdot e^{\delta_1 \cdot n_1}$. Так как ставка сложная, за следующие n_2 лет первоначальная сумма вырастет до $S_1 = S_1 e^{\delta_2 \cdot n_2} = P \cdot e^{\delta_1 \cdot n_1 + \delta_2 \cdot n_2}$. Продолжая рассуждения, получим, что наращенная сумма за весь срок будет равна

$$S = P \cdot e^{\sum_{t=1}^k \delta_t \cdot n_t}.$$

Мы рассмотрели случай, когда сила роста изменяется во времени дискретно.

Предположим, что сила роста меняется непрерывно и описывается некоторой непрерывной функцией времени $\delta = \delta(t)$. Тогда наращенная сумма

$$S = P \cdot e^{\int_0^k \delta(t) dt}.$$

Формула дисконтирования:

$$P = S \cdot e^{-\int_0^k \delta(t) dt}.$$

1.12 Эквивалентность процентных ставок

Ставки являются *эквивалентными*, если в конкретной финансовой операции они приводят к одному и тому же финансовому результату.

Задача определения эквивалентных ставок возникает, например, при сравнении ставок, применяемых в различных сделках и соглашениях, определении эффективности кредитно-финансовых операций, безубыточной замене одного вида ставок другим или одного метода их начисления другим.

Эквивалентность простых и сложных ставок

Для определения эквивалентных простых и сложных ставок необходимо приравнять соответствующие множители наращения

$$(1 + n \cdot i_n) = (1 + i)^n,$$

где i_n — простая ставка, i — сложная. Из этого соотношения легко получаем

$$i_n = \frac{(1+i)^n - 1}{n}, \quad (1.11)$$

$$i = (1 + n \cdot i_n)^{1/n} - 1. \quad (1.12)$$

Если сложная ставка начисляется m раз в год, то, так же приравнявая множители наращения, получим

$$i_n = \frac{(1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n} - 1}{n}, \quad (1.13)$$

$$j = m((1 + n \cdot i_n)^{1/m \cdot n} - 1). \quad (1.14)$$

Таким образом, замена в любой финансовой операции сложных ставок процентов эквивалентными им простыми по формулам (1.11), (1.13) или простой ставки эквивалентными ей сложными по формулам (1.12), (1.14) не изменяет конечного результата финансовой операции.

Пример 1.9. Какая сумма предпочтительнее при ставке 6 %: \$1000 сегодня или \$2000 через 8 лет?

Решение. Найдем современную величину \$2000 через 8 лет при ставке 6 %: $A = 2000 \cdot (1 + 0.06)^{-8} = 2000 \cdot 0.627 = 1254$.

Итак, $A = 1254 > 1000$. Следовательно, надо предпочесть сумму \$2000 через 8 лет.

1.13 Изменения условий контракта

Под изменением условий контракта мы будем понимать отдаление срока платежа или консолидирование платежей, то есть объединение нескольких обязательств в одно.

Изменение условий контракта осуществляется на основе принципа финансовой эквивалентности обязательств. Этот принцип гарантирует безубыточность изменений финансовых отношений для каждой из сторон. Эквивалентными считаются платежи, которые, будучи приведёнными по заданной процентной ставке к одному моменту времени, оказываются равными.

Общий метод решения подобных задач — составление уравнения эквивалентности. В этом уравнении сумма заменяе-

мых платежей, приведённых к какому-то одному моменту, приравнивается сумме платежей по новому обязательству, приведённых к той же самой дате.

Консолидирование задолженностей

Пусть имеются платежи $S_1, S_2, \dots, S_m$. Сроки платежей $n_1, n_2, \dots, n_m$. Эти платежи объединяются в один платёж S_0 со сроком выплаты n_0 . Возможны два варианта данной задачи:

1) задан срок консолидированного платежа n_0 , необходимо определить его размер S_0 ;

2) известен размер платежа S_0 , необходимо определить его срок n_0 .

Сначала будем решать задачу, используя простую ставку.

В первом варианте удобнее привести все платежи к моменту n_0 . Платежи, сроки которых меньше n_0 , необходимо нарастить по формуле простых процентов. Платежи, у которых сроки больше n_0 , необходимо дисконтировать. Пусть

S_j — размеры платежей, сроки которых $n_j < n_0$,

S_k — размеры платежей, сроки которых $n_k > n_0$,

$t_j = n_0 - n_j$ — время от момента выплаты j -го платежа со сроком $n_j < n_0$ до момента выплаты суммы S_0 ,

$t_k = n_k - n_0$ — время от момента выплаты k -го платежа со сроком $n_k > n_0$ до момента выплаты суммы S_0 ,

i — простая ставка процентов. Тогда

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + t_j \cdot i) + \sum_k S_k (1 + t_k \cdot i)^{-1}.$$

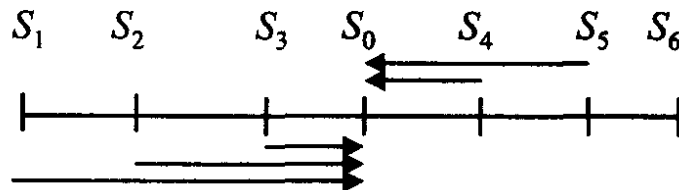


Рис 1.2

Первый член в этом уравнении объединяет все платежи, сроки которых $n_j < n_0$, второй — сроки которых $n_k > n_0$.

Таким образом, просуммировав эти платежи, мы получили сумму S_0 , которая в финансовом отношении эквивалентна всем распределённым во времени платежам. Важно отметить, что размер суммы S_0 и срок её выплаты взаимосвязаны.

Консолидирование по сложной ставке процентов приводит к соотношению

$$S_0 = \sum_j S_j (1+i)^{t_j} + \sum_k S_k (1+i)^{-t_k}.$$

Рассмотрим второй вариант задачи, используя сначала простую ставку процентов. Здесь удобнее привести все платежи на начальную дату (момент времени, который принят за начало отсчета). Уравнение эквивалентности запишется в виде

$$S_0 (1 + n_0 \cdot i)^{-1} = \sum_t S_t (1 + n_t \cdot i)^{-1}.$$

Обозначим $\sum_t S_t (1 + n_t \cdot i)^{-1} = P_0$ — современную величину заменяемых платежей.

Решая это уравнение относительно n_0 , получим

$$n_0 = \frac{1}{i} \left(\frac{S_0}{P_0} - 1 \right).$$

В данном случае задача не всегда имеет решение. Очевидно, решение существует, если $S_0 > P_0$, поскольку только в этом случае $n_0 > 0$.

Определим срок платежа на основе сложных ставок. Уравнение эквивалентности на основе сложной ставки процентов имеет вид

$$S_0 (1+i)^{-n_0} = \sum_t S_t (1+i)^{-n_t}.$$

Обозначим $Q = \sum_t S_t (1+i)^{-n_t}$ — сумму дисконтированных на начальную дату платежей.

Решая уравнение, получим

$$n_0 = \frac{\ln(S_0 / Q)}{\ln(1 + i)}.$$

Решение данной задачи тоже существует не всегда. Условие существования решения: $S_0 > Q$, так как только тогда $n_0 > 0$ (формально это следует из свойств логарифмической функции).

Общий случай изменения условий контракта

В общем случае несколько платежей могут заменяться также несколькими платежами. Пусть

S_q — платежи со сроками n_q , которые предусматриваются новыми условиями,

S_k — заменяемые платежи со сроками n_k .

Будем предполагать, что все платежи приводятся на начальный момент времени.

Уравнение эквивалентности для сложной ставки:

$$\sum_q S_q v^{n_q} = \sum_k S_k v^{n_k}.$$

Данная задача не имеет однозначного решения и в некоторых случаях может быть решена только методом подбора.

Глава 2. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ, РЕНТЫ

2.1 Основные определения

На практике финансовые операции, как правило, предусматривают распределённые во времени выплаты и поступления денежных сумм.

Потоком платежей будем называть последовательность (ряд) выплат и поступлений, приуроченных к разным моментам времени.

Поток платежей, все элементы которого — положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют **финансовой рентой** или **аннуитетом** вне зависимости от цели, назначения и происхождения этих платежей.

Финансовая рента описывается следующими параметрами:

- Член ренты — величина каждого отдельного платежа.
- Период ренты — временной интервал между платежами.
- Срок ренты — время от начала ренты до конца её последнего периода.
- Процентная ставка — это ставка, которая используется при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента.

Кроме того, могут быть дополнительные параметры: количество платежей в год, количество начислений процентов в год, моменты выплаты платежей (в начале или в конце периода ренты) и т.д.

Виды финансовых рент

Рента называется *годовой*, если ее период равен одному году.

Рента называется *p -срочной*, если ее период меньше года и количество платежей в год равно p .

Эти ренты относятся к *дискретным*, поскольку выплаты приурочены к дискретным моментам времени. Бывают ренты *непрерывные*, когда поток платежей описывается непрерывной функцией.

Ренты бывают *постоянные* и *переменные*.

Рента называется *постоянной*, если все ее платежи одинаковы и не меняются во времени. Если размеры платежей зависят от времени, то это *переменная рента*.

По вероятности уплаты ренты делят на *верные* и *условные*.

Рента называется *условной*, если выплата очередного платежа ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Количество выплат в такой ренте заранее не известно. Примерами таких рент могут служить выплаты пенсий, платежи по личному страхованию.

Если условия выплаты платежей по ренте (их размеры, количество и сроки) определены заранее, то такая рента называется *верной*.

Рента называется *ограниченной*, если количество платежей конечно, в противном случае рента называется *бесконечной* или *вечной*. Например, долгосрочное обязательство, когда срок финансовой операции продолжителен и заранее не оговаривается, представляет собой вечную ренту.

Ренты бывают *немедленные* и *отложенные* (отсроченные). Срок немедленных рент начинается с момента заключения контракта. Если рента отложенная, то срок начала выплат отодвигается на какое-то время.

Если платежи осуществляются в конце периода, то такая рента называется *обычной* или *постнумерандо*. Если выплаты осуществляются в начале периода, то такая рента называется *пренумерандо*.

Обобщающие характеристики потоков платежей

Для анализа потоков платежей необходимо уметь рассчитывать их основные обобщающие характеристики. Таких характеристик две: наращенная сумма и современная величина ренты.

Наращенной суммой потока платежей называют сумму всех последовательных платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Современной величиной потока платежей называют сумму всех платежей, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или упреждающий его.

Наращенную сумму определяют, например, чтобы знать общую сумму задолженности на какой-либо момент времени, итоговый объём инвестиций, накопленный на момент оценки денежный резерв и т.д.

Современная величина является важнейшим показателем при оценке финансовой эффективности коммерческих сделок, реальных и финансовых инвестиций и т.д.

Рассмотрим задачи определения наращенных сумм для различных видов рент постнумерандо.

2.2 Нарращенная сумма годовой ренты

При выводе формул для наращенных сумм рент важно правильно установить момент поступления очередного платежа и определить срок (в годах), в течение которого на этот платеж будут начисляться проценты. После этого, чтобы определить размер платежа с начисленными на него процентами за этот срок, достаточно применить формулу начисления сложных процентов. Наиболее просто данная задача решается для годовой ренты с начислением процентов один раз в год. Такая рента называется обычной.

Пусть

S — наращенная сумма ренты;

R — размер отдельного платежа;

i — ставка процентов в виде десятичной дроби;

n — срок ренты в годах.

На рис. 2.1 изображена диаграмма, иллюстрирующая процесс формирования потока платежей с начисленными на них процентами. На горизонтальной оси указаны моменты поступления платежей, показатели степени в соответствующих формулах — периоды времени, в течение которых на данные платежи начисляются проценты.

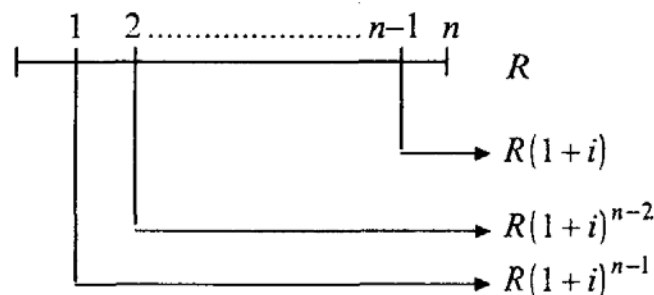


Рис. 2.1

Для определения наращенной суммы S необходимо просуммировать получившийся ряд платежей. Заметим, что этот ряд образует геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем, равным $1+i$.

Напомним, что геометрическая прогрессия — это ряд, каждый член которого получается из предыдущего умножением на одно и то же число.

Формула для суммы n членов геометрической прогрессии имеет вид

$$S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1), \quad (2.1)$$

где a_1 — первый член прогрессии, q — знаменатель прогрессии.

Используя эту формулу, получим соотношение для вычисления наращенной суммы годовой ренты:

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Величина

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

называется **коэффициентом наращенной годовой ренты**.

С использованием введенного обозначения выражение для наращенной суммы годовой ренты можно записать так:

$$S = R s_{n,i}. \quad (2.2)$$

Если платежи поступают в начале периода, то коэффициент наращенной ренты равен

$$s_{n,i} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

В случае простых процентов наращенная сумма платежей равна:

$$\begin{aligned} & R \cdot [1 + (n-1) \cdot i] + R \cdot [1 + (n-2) \cdot i] + \dots + R \cdot [1 + i] + R = \\ & = R \left[n + i \cdot (1 + 2 + \dots + (n-1)) \right] = R \left[n + i \frac{n \cdot (n-1)}{2} \right] = \\ & = R \cdot \hat{s}(n, i), \end{aligned}$$

где $\hat{s}(n, i) = \left[n + i \frac{n \cdot (n-1)}{2} \right]$ — коэффициент наращенной годовой ренты по ставке простых процентов.

2.3 Нарощенная сумма годовой ренты с начислением процентов m раз в год

Пусть платежи поступают один раз в год в конце года (то есть интервал ренты равен одному году), а начисление процентов происходит m раз в год. Процесс формирования платежей вместе с начисленными на них процентами изображен на диаграмме (рис. 2.2).

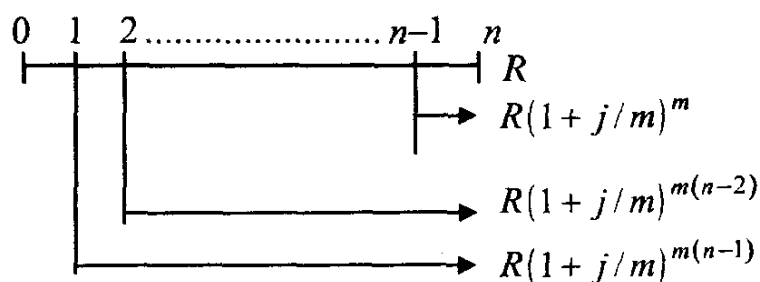


Рис. 2.2

При начислении процентов здесь используется формула начисления сложных процентов по номинальной ставке (см. раздел 1.7).

Определим сумму элементов получившегося ряда.

Имеем геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем прогрессии, равным $(1 + \frac{j}{m})^m$, всего членов ряда n .

Используя формулу (2.1) для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$S = R \frac{(1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n} - 1}{(1 + \frac{j}{m})^m - 1}.$$

Обозначим

$$S_{n, j/m} = \frac{(1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n} - 1}{(1 + \frac{j}{m})^m - 1}.$$

Тогда наращенная сумма

$$S = R s_{n,j/m}.$$

2.4 Наращенная сумма р-срочной ренты

Пусть платежи поступают p раз в год равными суммами, проценты начисляются один раз в год в конце года ($m = 1$).

Если R — годовая сумма, то отдельный платеж равен R/p . Поскольку в год поступает p платежей, то интервал между платежами будет равен $1/p$ лет. Первый платеж поступит в момент времени $1/p$. Процесс формирования платежей с процентами изображен на диаграмме (рис. 2.3).

Имеем геометрическую прогрессию, первый член которой равен R/p , знаменатель $(1+i)^{1/p}$, всего членов ряда $n \cdot p$.

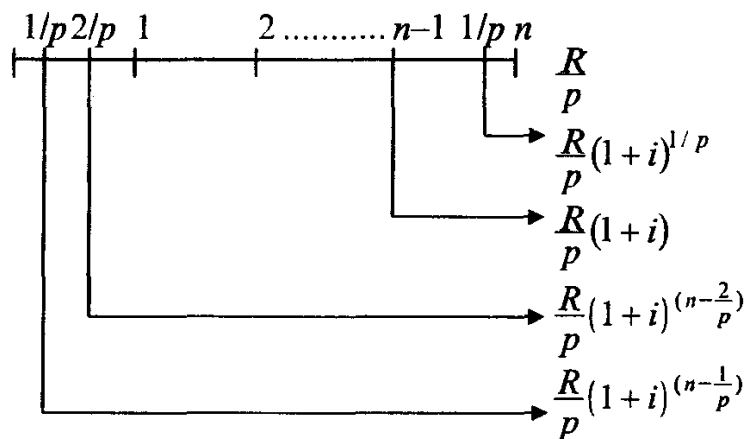


Рис. 2.3

Используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$S = \frac{R}{p} \frac{((1+i)^{1/p})^{np} - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = R \cdot s_{n,i}^{(p)},$$

где $s_{n,i}^{(p)}$ — коэффициент наращивания p -срочной ренты с начислением процентов один раз в год, равный

$$s_{n,i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p \cdot ((1+i)^{1/p} - 1)}.$$

2.5 Нарощенная сумма p -срочной ренты при $p \neq m$, $m \neq 1$

Параметры такой ренты: p платежей в год и m раз в год начисление процентов по номинальной ставке j . Рента с такими условиями называется общей.

Принцип получения формулы для наращенной суммы аналогичен вышеприведенным случаям.

Первый платеж равен R/p , момент поступления этого платежа (момент времени от начала срока ренты) равен $1/p$ и в конце срока ренты этот платеж даст сумму с процентами

$$\frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\left(n - \frac{1}{p}\right)m}.$$

Второй платеж с начисленными на него процентами будет равен

$$\frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\left(n - \frac{2}{p}\right)m}.$$

Предпоследний платеж даст сумму

$$\frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\left(n - \frac{np-1}{p}\right)m} = \frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}.$$

На последний платеж проценты не начисляются, и он будет равен R/p .

Просуммируем члены полученного ряда, используя формулу (2.1) для суммы членов геометрической прогрессии со следующими параметрами:

первый член прогрессии равен $\frac{R}{p}$, знаменатель $\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$, P — количество членов прогрессии np . Получим

$$S = \frac{R}{p} \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p} np} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right)}.$$

Обозначим $s_{n,j/m}^{(p)} = \frac{(1 + \frac{j}{m})^{mn} - 1}{p((1 + \frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} - 1)}$ — коэффициент нараще-

ния p -срочной ренты при начислении процентов m раз в год. Тогда формула для наращенной суммы примет вид

$$S = Rs_{n,j/m}^{(p)}.$$

2.6 Современная величина обычной ренты

Современная величина ренты является важнейшей характеристикой потока платежей, которая определяет стоимость будущего денежного потока на настоящий момент времени. Эта характеристика служит основой для многих методов финансового анализа. По определению, современная величина — это сумма всех дисконтированных членов потока платежей на начальный или предшествующий ему момент времени. Иногда вместо термина *современная величина* используют термины *приведенная* или *капитализированная сумма платежей*. При определении современной величины потока платежей важно правильно установить период времени от начала потока (момента времени, на который производится оценка) до момента поступления платежа (в годах). После этого можно применять формулы дисконтирования. Обозначим v — множитель дисконтирования, $v = \frac{1}{1+i}$, где

i — годовая ставка.

Диаграмма на рис. 2.4 иллюстрирует процесс формирования потока дисконтированных платежей на начало срока ренты. Показатели степеней — периоды времени в годах от начала ренты до момента поступления платежа.

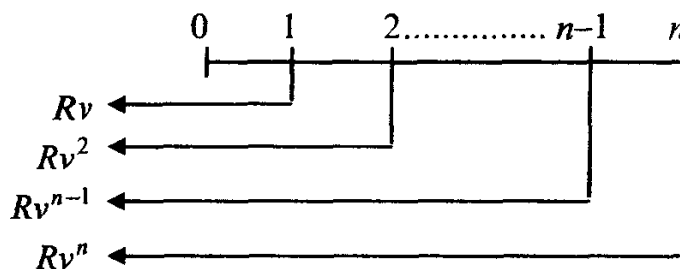


Рис. 2.4

Чтобы получить современную величину потока, просуммируем все члены получившегося ряда. Очевидно, имеем геометрическую прогрессию с характеристиками:

- первый член прогрессии равен Rv ;
- знаменатель прогрессии — v ;
- количество членов прогрессии — n .

Используя формулу (2.1) для суммы членов геометрической прогрессии, получим, что современная величина ренты (обозначим ее символом A) равна

$$A = \frac{Rv(v^n - 1)}{v - 1} = R \frac{1 - v^n}{i} = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

Величина $a_{n,i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$ называется *коэффициентом приведения годовой ренты*.

Если платежи поступают в начале периода, то коэффициент приведения ренты равен $a_{n,i} = (1 + i) \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$.

С учетом этого выражение для современной величины примет вид $A = Ra_{n,i}$.

В случае простых процентов мы должны просуммировать поток

$$\frac{R}{1+i} + \frac{R}{1+2 \cdot i} + \dots + \frac{R}{1+n \cdot i} = R \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+i \cdot k}$$

или

$$A = R \cdot \hat{a}(n, i),$$

где $\hat{a}(n, i) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+i \cdot k}$ — *коэффициент приведения годовой ренты по ставке простых процентов*.

2.7 Современная величина годовой ренты с начислением процентов m раз в год

В полученную формулу для современной величины годовой ренты вместо множителя дисконтирования $(1+i)^{-1}$ подставим множитель $(1+\frac{j}{m})^{-m}$. Получим

$$A = R \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{(1 + j/m)^m - 1}.$$

Обозначим $a_{n,j/m} = \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{(1 + j/m)^m - 1}$, тогда $A = Ra_{n,j/m}$.

2.8 Современная величина p -срочной ренты ($m=1$)

Интервал между платежами у такой ренты равен $1/p$, размер платежа R/p . Порядок формирования дисконтированных платежей показан на рис. 2.5.

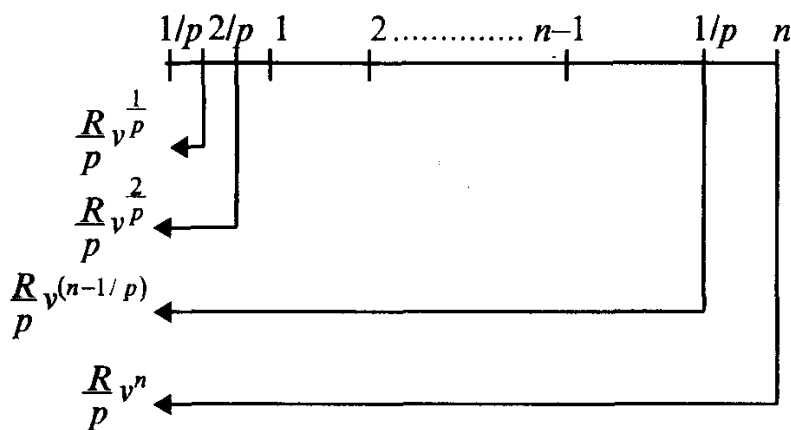


Рис. 2.5

Имеем геометрическую прогрессию с количеством членов, равным np , первый член прогрессии равен $\frac{R}{p}v^{1/p}$, знаменатель прогрессии — $v^{1/p}$. Используя формулу (2.1) для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$A = \frac{R v^{\frac{1}{p}} (v^{\frac{1}{p} np} - 1)}{p \frac{1}{v^{\frac{1}{p}}} - 1} = \frac{R (v^n - 1)}{p (1 - \frac{1}{v^{1/p}})} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p} - 1)}.$$

Обозначим $a_{n,i}^{(p)} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p} - 1)}$ — коэффициент приведения p -срочной ренты.

Тогда формула для расчета современной величины p -срочной ренты будет иметь вид $A = Ra_{n,i}^{(p)}$.

2.9 Современная величина p -срочной ренты при $p \neq m, m \neq 1$

В данном случае коэффициент дисконтирования $v = \frac{1}{1 + j/m}$.

Далее первый дисконтированный платеж равен $\frac{R}{p} v^{m/p}$, второй

дисконтированный платеж равен $\frac{R}{p} v^{2m/p}$, предпоследний дис-

контированный платеж равен $\frac{R}{p} v^{\frac{(np-1)m}{p}}$ и, наконец, последний

платеж равен $\frac{R}{p} v^{mn}$. Напомним, что показатель степени у множи-

теля дисконтирования — это интервал времени (измеряемый в годах) от начала ренты до момента поступления платежа с учетом m -разового в год начисления процентов. Имеем геометрическую прогрессию с количеством членов np , первым чле-

ном $\frac{R}{p} v^{m/p}$ и знаменателем прогрессии $v^{m/p}$. Сумма членов этой прогрессии

$$A = \frac{R v^{m/p} (v^{mn} - 1)}{p v^{m/p} - 1} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{(1 + j/m)^{m/p} - 1}.$$

Обозначим $a_{mn, j/m}^{(p)} = \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{p((1 + j/m)^{m/p} - 1)}$ — коэффициент приведения общей ренты.

Тогда окончательно формула для современной величины данной ренты примет вид

$$A = Ra_{n, j/m}^{(p)}.$$

На практике количество начислений процентов и выплат (или поступлений) часто совпадает, то есть $p = m$. Тогда

$$a_{n, j/m}^{(p)} = \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{j}.$$

2.10 Соотношение между наращенной и современной величинами ренты

Пусть A — современная величина годовой ренты на начало срока с начислением процентов один раз в год, S — наращенная сумма этой ренты. Тогда можно показать, что $A(1+i)^n = S$, то есть начисление процентов на сумму A за n периодов даёт наращенную сумму ренты. Действительно

$$A(1+i)^n = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)^n = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n,i} = S.$$

Кроме этого, очевидно, имеем еще ряд соотношений:

$$Sv^n = A,$$

где $v = \frac{1}{1+i}$, $a_{n,i}(1+i)^n = s_{n,i}$, $s_{n,i}v^n = a_{n,i}$.

2.11 Определение параметров финансовых рент

В данном разделе рассмотрим несколько задач, возникающих в связи с понятием ренты.

Определение размера платежа (члена) ренты.

Определение срока ренты.

Определение ставки процентов.

Чтобы не перегружать изложение громоздкими выкладками и формулами, рассмотрим наиболее простой вид рент, а именно

годовую ренту с начислением процентов один раз в год. Для других видов рент решения получаются аналогично.

Определение размера платежа

Очевидно, что если задана наращенная сумма, то

$$R = \frac{S}{s_{n,i}}.$$

Если же задана современная величина ренты, то

$$R = \frac{A}{a_{n,i}}.$$

Определение срока ренты

Если известна наращенная сумма S , то срок n определяется из решения уравнения:

$$R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S.$$

После простых преобразований будем иметь

$$(1+i)^n = \frac{S}{R}i + 1.$$

Логарифмируя правую и левую части и выражая из получившегося соотношения n , получим

$$n = \frac{\ln(\frac{S}{R}i + 1)}{\ln(1+i)}.$$

Если известна приведённая величина ренты, аналогично получаем

$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{A}{R}i)}{\ln(1+i)}.$$

Определение ставки процентов

Расчётная величина ставки имеет важное значение в финансовом и экономическом анализе при выяснении доходности финансовых и коммерческих операций.

Для определения ставки необходимо решить либо уравнение

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

если известна наращенная сумма, либо уравнение

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i},$$

если известна современная величина ренты, относительно неизвестной величины i .

Имеем нелинейные уравнения, точное решение которых (в виде расчетной формулы для i) получить невозможно. Данные уравнения допускают только приближенное решение с использованием специальных численных методов, например метода Ньютона, который легко реализуется с помощью табличных процессоров типа Microsoft Excel.

2.12 Анализ переменных потоков платежей

Рассмотрим два вида переменных потоков платежей.

1. Пусть размер платежа зависит от времени, платежи поступают в конце года и проценты начисляются один раз в год, ставка процентов постоянна.

Обозначим R_t — размер платежа ($t = 1, 2, \dots, n$). В соответствии с определением формула для наращенной суммы будет иметь вид

$$S = R_1(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + \dots + R_{n-1}(1+i) + R_n,$$

здесь S — сумма платежей с начисленными на них процентами. Используя символ суммирования, данную формулу можно записать в виде

$$S = \sum_{t=1}^n R_t (1+i)^{n-t}.$$

Аналогично получается формула для современной величины потока

$$A = \sum_{t=1}^n R_t v^t,$$

где A — сумма дисконтированных на нулевой момент платежей,
 $v = \frac{1}{1+i}$ — множитель дисконтирования.

2. Предположим, что весь срок n разбит на k промежутков длительностью n_t каждый ($t=1, 2, \dots, k$, $\sum_{t=1}^k n_t = n$) и в каждом из этих промежутков размеры платежей постоянны. Обозначим их R_t . Проценты начисляются один раз в год. Необходимо определить наращенную сумму S на конец всего срока ренты. Очевидно, что внутри каждого промежутка платежи представляют постоянную годовую ренту.

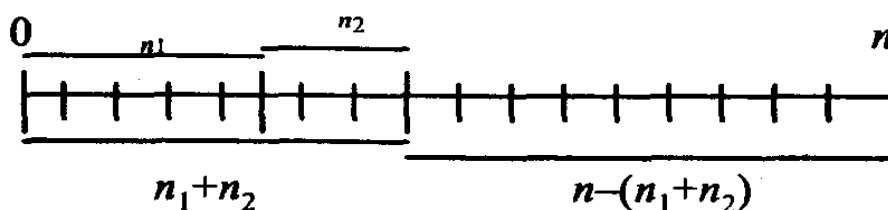


Рис. 2.6

Определим S_1 — наращенную сумму платежей первого промежутка на момент времени n_1 . Используя формулу для наращенной суммы годовой ренты, получим

$$S_1 = R_1 s_{n_1, i}.$$

Наращенная сумма платежей первого промежутка на момент времени n равна

$$S_1(1+i)^{n-n_1} = R_1 s_{n_1, i} (1+i)^{n-n_1}.$$

Наращенная сумма платежей второго промежутка на момент времени $n_1 + n_2$ равна: $S_2 = R_2 s_{n_2, i}$. Наращенная сумма платежей второго промежутка на конец общего срока n :

$$S_2(1+i)^{n-(n_1+n_2)} = R_2 s_{n_2, i} (1+i)^{n-(n_1+n_2)}.$$

Для последнего, k -го, промежутка наращенная сумма равна $S_k = R_k s_{n_k, i}$.

Эта сумма получается на момент окончания всего срока ренты n . Наращенная сумма для всего потока платежей

$$S = R_1 s_{n_1, i} (1+i)^{n-n_1} + R_2 s_{n_2, i} (1+i)^{n-(n_1+n_2)} + \dots + R_k s_{n_k, i}.$$

Мы предполагали, что ставка процентов постоянна на каждом промежутке. Если это не так, то формула модифицируется. Пусть на каждом промежутке действует своя ставка i_1 . Тогда наращенная сумма определяется по формуле

$$S = R_1 s_{n_1, i_1} (1+i_2)^{n_2} (1+i_3)^{n_3} \dots (1+i_k)^{n_k} + \\ + R_2 s_{n_2, i_2} (1+i_3)^{n_3} (1+i_4)^{n_4} (1+i_k)^{n_k} \dots + \dots + R_k s_{n_k, i_k}.$$

Выражение для современной величины такого потока при постоянной ставке получается аналогично. Сначала определим приведенную величину платежей первого промежутка на начальный момент:

$$A_1 = R_1 a_{n_1, i}.$$

Приведённая величина платежей второго промежутка на его начало (то есть на момент n_1):

$$A_2 = R_2 a_{n_2, i}.$$

Эта же величина, приведенная на начало всего срока (на нулевой момент):

$$A_2 v^{n_1} = R_2 a_{n_2, i} v^{n_1}.$$

Приведённая величина платежей третьего промежутка на его начало (то есть на момент n_2) $A_3 = R_3 a_{n_3, i}$, приведенная на начало всего срока

$$A_3 v^{n_1+n_2} = R_3 a_{n_3, i} v^{n_1+n_2}.$$

Современная величина платежей последнего промежутка на его начало:

$$A_k = R_k a_{n_k, i}.$$

Эта величина, приведенная на нулевой момент:

$$A_k v^{n-n_k} = R_k a_{n_k, i} v^{n-n_k}.$$

Суммируя полученные величины, будем иметь

$$A = R_1 a_{n_1, i} + R_2 a_{n_2, i} v^{n_1} + \dots + R_k a_{n_k, i} v^{n-n_k}.$$

Рассуждая аналогично, получим формулу для случая переменных ставок:

$$A = R_1 a_{n_1, i_1} + R_2 a_{n_2, i_2} v_1^{n_1} + R_3 a_{n_3, i_3} v_1^{n_1} v_2^{n_2} + \dots + R_k a_{n_k, i_k} v_1^{n_1} v_2^{n_2} \dots v_{k-1}^{n_{k-1}}.$$

Если внутри промежутков поток платежей — p -срочная рента, то в полученных формулах следует использовать коэффициенты наращенная или приведения для соответствующих p -срочных рент.

2.13 Анализ дискретного потока платежей с непрерывным начислением процентов

Определение наращенной суммы

Пусть платежи не зависят от времени и поступают один раз в конце периода, а проценты на них начисляются непрерывно. Тогда поток платежей с начисленными на них процентами на конец срока ренты запишется в виде

$$Re^{\delta(n-1)}, Re^{\delta(n-2)}, \dots, Re^{\delta}, R$$

(здесь использовалась формула начисления непрерывных процентов (1.12), см. п. 1.11).

Имеем геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем e^{δ} . Используем формулу (2.1) для суммы членов геометрической прогрессии. Получим

$$S = Rs_{n,\delta},$$

где коэффициент наращенная

$$s_{n,\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}.$$

Для p -срочной ренты формула получается аналогично. Если платежи поступают p раз в год, а начисление процентов непрерывно, наращенная сумма равна

$$S = Rs_{n,\delta}^{(p)}, \text{ где } s_{n,\delta}^{(p)} = \frac{e^{\delta n} - 1}{p(e^{\delta/p} - 1)}.$$

Современная величина дискретной ренты при непрерывном начислении процентов

Ряд дискретных платежей, дисконтированных на начало срока ренты:

$$Re^{-\delta}, Re^{-2\delta}, \dots, Re^{-n\delta}.$$

Имеем геометрическую прогрессию с первым членом, равным $Re^{-\delta}$, и знаменателем $e^{-\delta}$. Использование формулы для суммы членов такой прогрессии позволяет получить соотношение для современной величины:

$$A = Ra_{n,\delta}, \text{ где } a_{n,\delta} = \frac{1 - e^{-n\delta}}{e^{\delta} - 1}.$$

Аналогично для p -срочной ренты получим

$$A = Ra_{n,\delta}^{(p)}, \text{ где } a_{n,\delta}^{(p)} = \frac{1 - e^{-n\delta}}{p(e^{\delta/p} - 1)}.$$

Наращенная сумма и приведенная величина переменного дискретного потока с непрерывным начислением процентов

Пусть размер платежа R , зависит от времени. Формулы для наращенной суммы и современной величины такого потока с непрерывным начислением процентов имеют вид:

$$S = \sum_t R_t e^{\delta(n-t)}, \quad A = \sum_t R_t e^{-\delta t}.$$

2.14 Непрерывный поток платежей с дискретным начислением процентов

Постоянная непрерывная рента

Предполагаем, что размер годового платежа не зависит от времени и равен R . Непрерывное поступление платежей означает, что в p -срочной ренте $p \rightarrow \infty$. Определим коэффициент приведения такой ренты. Для p -срочной ренты мы имели

$$a_{n,i}^{(p)} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p} - 1)}.$$

Коэффициент приведения для непрерывной ренты с дискретным начислением процентов будет равен следующей величине:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{n,i} &= \lim_{p \rightarrow \infty} a_{n,i}^{(p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p} - 1} = \\ &= (1 - (1+i)^{-n}) \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p((1+i)^{1/p} - 1)}.\end{aligned}$$

Для определения этого предела используем правило Лопиталя. Напомним, что, согласно этому правилу, предел некоторого выражения равен пределу отношения производной числителя к производной знаменателя. Имеем

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1/p}{[(1+i)^{1/p} - 1]} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{-1/p^2}{(1+i)^{1/p}(-1/p^2)\ln(1+i)} = \frac{1}{\ln(1+i)}.\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент приведения непрерывной ренты

$$\bar{a}_{n,i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}.$$

Современная величина непрерывной ренты вычисляется по формуле

$$A = R\bar{a}_{n,i}.$$

Чтобы определить наращенную сумму непрерывной ренты, рассмотрим коэффициент наращивания для p -срочной ренты, который имеет вид

$$s_{n,i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}.$$

При $p \rightarrow \infty$ получим коэффициент наращивания непрерывной ренты:

$$\bar{s}_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{\ln(1+i)}.$$

Аналогично можно определить коэффициенты приведения и наращивания непрерывной ренты, если начисление процентов осуществляется m раз в год. В этом случае

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \frac{1}{(1 + j/m)^{m/p} - 1} = \frac{1}{m \ln(1 + j/m)}.$$

Используя это выражение, запишем формулу для коэффициента приведения:

$$\bar{a}_{mn, j/m} = \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{m \ln(1 + j/m)}.$$

Коэффициент наращения в этом случае

$$\bar{s}_{mn, j/m} = \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{m \ln(1 + j/m)}.$$

Непрерывные переменные потоки платежей

Предположим, что поток платежей непрерывный, размер платежа зависит от времени и описывается непрерывной функцией времени $R_t = f(t)$. Начисление процентов производится тоже непрерывно. Тогда наращенная сумма по непрерывной ставке определяется по формуле

$$S = \int_0^n f(t) e^{\delta(n-t)} dt.$$

Современная величина такого потока платежей

$$A = \int_0^n f(t) e^{-\delta t} dt.$$

2.15 Конверсии рент

Конвертировать ренту означает изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату этой ренты.

Простые виды конверсии

К простым видам конверсии относятся:

1. Выкуп ренты — замена ренты единовременным платежом. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что при этом вместо ренты выплачивается современная ее величина.

2. Рассрочка платежей — замена единовременного платежа рентой.

В этом случае современную величину ренты нужно приравнять к величине заменяемого платежа и определить либо размер платежа такой ренты при заданном сроке, либо, если известен размер платежа, определить срок ренты. Данные задачи сводятся к задачам определения параметров ренты, которые рассматривались ранее (см. п. 2.11).

Сложные конверсии

К сложным конверсиям относится замена одной ренты другой, что означает изменение параметров ренты. Из условия финансовой эквивалентности следует, что при такой замене современные величины этих рент должны быть равны.

Другими словами, если A_1 — современная величина заменяемой ренты, A_2 — современная величина заменяющей ренты на тот же момент времени, то должно соблюдаться условие: $A_1 = A_2$.

Примеры конверсии

1. Замена немедленной ренты на отсроченную.

Пусть имеется годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1, i . Эта рента заменяется на отсроченную на t лет ренту со сроком n_2 и ставкой i . Данная задача сводится к определению размера платежа R_2 второй ренты. Из условия финансовой эквивалентности имеем уравнение

$$R_1 a_{n_1, i} = R_2 a_{n_2, i} v^t, \quad (2.3)$$

где v — множитель дисконтирования по ставке i , из которого получаем

$$R_2 = R_1 \left(\frac{a_{n_1, i}}{a_{n_2, i}} \right) (1 + i)^t.$$

Если проценты начисляются m раз в год, то задача решается аналогично.

Предположим далее, что $R_1 = R_2$, а поскольку рента отсроченная, то изменяется ее срок, который и нужно определить. Решая уравнение эквивалентности (2.3) относительно n_2 , получим

$$n_2 = \frac{-\ln \left\{ 1 - \left[1 - (1+i)^{-n_1} \right] (1+i)^t \right\}}{\ln(1+i)}.$$

2. Изменение продолжительности и срочности ренты.

Рассмотрим обычную годовую ренту с параметрами R_1, n_1, i . Эта рента заменяется другой, у которой параметры R_2, n_2, i .

Предположим, что платеж R_2 известен, необходимо определить срок n_2 . Приравнявая современные величины рент, получим уравнение

$$R_1 a_{n_1, i} = R_2 a_{n_2, i},$$

из которого находим срок второй ренты n_2 . Эта задача решается аналогично задаче определения срока годовой ренты (см. п. 2.11). Если срок известен, то из этого же уравнения можно определить R_2 .

Рассмотрим данную задачу, если изменяется срочность ренты. Пусть p -срочная рента с параметрами p_1, R_1, n_1, i_1 заменяется на p -срочную ренту с параметрами p_2, R_2, n_2, i_2 . Необходимо определить параметр второй ренты — размер платежа R_2 . Из условия равенства современных величин потоков платежей имеем

$$R_1 a_{n_1, i_1}^{(p_1)} = R_2 a_{n_2, i_2}^{(p_2)},$$

откуда легко определяется R_2 . Если R_2 известно, то, решая это уравнение, можно определить n_2 .

3. Объединение рент.

Предположим, что k годовых рент с начислением процентов один раз в год, параметры которых известны, заменяются одной годовой рентой. Пусть A — современная величина заменяющей ренты; A_q , $q = 1, 2, \dots, k$ — современные величины заменяемых рент. Тогда условие финансовой эквивалентности запишется так:

$$A = \sum_{q=1}^k A_q.$$

Если моменты начала рент не совпадают, то современные величины этих рент определяют на момент начала самой ранней ренты. При объединении рент возникают две задачи:

- определить размер платежа заменяющей ренты, если задан ее срок;
- определить срок заменяющей ренты при заданных остальных параметрах.

Поскольку современная величина заменяющей ренты известна, обе эти задачи сводятся к соответствующим задачам определения параметров годовой ренты.

Глава 3. КРЕДИТНЫЕ РАСЧЕТЫ

Заем, кредит, ссуда — древнейшие финансовые операции. По-латыни «creditum» означает «ссуда»; в слове «кредит» ударение на втором слоге («кредит» с ударением на первом слоге — это правая часть бухгалтерских проводок).

Все три слова — «заем», «кредит», «ссуда» — означают одно и то же — предоставление денег или товаров в долг на условиях возвратности и, как правило, с уплатой процентов. Тот, кто выдает деньги или товары в кредит, называется кредитор, кто берет — заемщик (или дебитор). Условия выдачи и погашения кредитов (займов, ссуд) весьма разнообразны. Здесь рассмотрены лишь самые простые и наиболее распространенные способы погашения займов.

3.1 Показатель полной доходности финансово-кредитной операции

Доходы от финансово-кредитных операций и различных коммерческих сделок могут иметь разную форму, а именно это могут быть:

- проценты от выданных ссуд,
- комиссионные,
- доходы от облигаций и других ценных бумаг и т.д.

Как правило, в одной и той же операции предусматривается несколько источников дохода: ссуда приносит кредитору проценты и комиссионные, владелец облигации кроме процентов по облигации получает разницу между выкупной ценой облигации и ценой её приобретения.

В связи с этим возникает проблема измерения эффективности (доходности) операции с учётом всех источников дохода. Обобщённая характеристика доходности должна быть универсальной и применимой к любым видам финансовых операций.

Степень финансовой эффективности подобных операций обычно измеряется в виде годовой ставки сложных процентов. Данную ставку как показатель эффективности (полной доходности, т.е. доходности с учетом всех предусмотренных в операции

источников дохода) получают, исходя из общего принципа, а именно: все дисконтированные по искомой ставке доходы (капитализированная величина доходов), предусмотренные в данной операции, приравниваются к приведенным по той же ставке и на тот же момент времени расходам. Из полученного уравнения определяют искомую ставку. Для ссудной операции это означает равенство дебетовой суммы кредита, то есть кредит за вычетом комиссионных, сумме дисконтированных поступлений. Чем выше ставка, тем больше эффективность операции.

Данная процентная ставка непосредственно в контрактах не фигурирует и в зависимости от вида операции носит различные наименования: в ссудных операциях применяют термин **эффективная процентная ставка**, в анализе доходности облигаций — **доходность на момент погашения** (точнее, обещанная доходность на момент погашения), в анализе производственных инвестиций аналогичный показатель называется **внутренней нормой доходности** (внутренняя норма процента).

Основой для расчета полной доходности финансовой операции является соотношение, которое называется балансом финансово-кредитной операции.

3.2 Баланс финансово-кредитной операции

Необходимым условием любой финансово-кредитной операции является сбалансированность вложений и отдачи. Рассмотрим понятие баланса финансово-кредитной операции.

Пусть выдан кредит в размере K_0 на срок T , ставка по кредиту равна i . Пусть на протяжении этого срока в счёт погашения задолженности производятся два платежа, размеры которых R_1 и R_2 , а в конце срока выплачивается окончательная сумма R_3 . Весь срок разбит на три периода длительностью t_1, t_2, t_3 . За период времени t_1 задолженность возрастет до величины D_1 (поскольку на сумму кредита начисляются проценты). По истечении этого времени в счёт погашения кредита выплачивается сумма R_1 и размер задолженности становится равным K_1 . Далее, за время t_2 сумма K_1 возрастет до величины D_2 . По истечении промежутка време-

ни t_2 вносится очередная сумма R_2 , размер задолженности уменьшается и становится равным сумме K_2 . Наконец, за время t_3 размер задолженности возрастает до величины D_3 и по окончании этого промежутка времени, в момент времени T , выплачивается сумма R_3 . Для сбалансированной операции размер платежа R_3 должен быть таким, чтобы задолженность была погашена. На рис. 3. 1 описанный процесс изображен в виде графика, который называют **контуром финансово-кредитной операции**.

Сбалансированная операция должна иметь замкнутый контур.

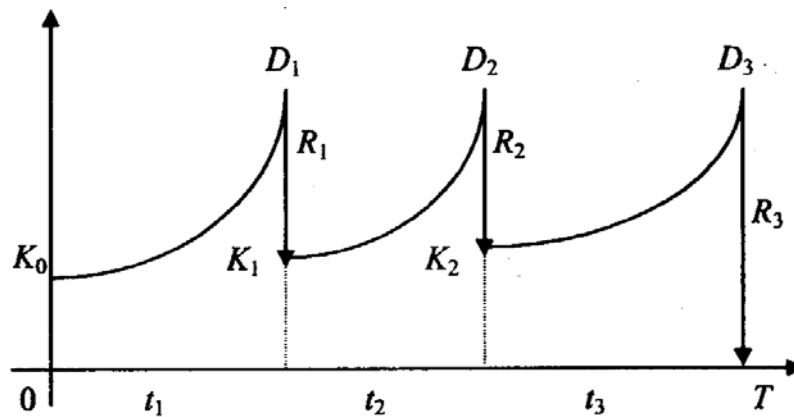


Рис. 3.1

Математически процесс погашения задолженности можно описать уравнениями:

$$K_1 = K_0 q^{t_1} - R_1,$$

$$K_2 = K_1 q^{t_2} - R_2,$$

$$K_2 q^{t_3} - R_3 = 0,$$

где $q = (1 + i)$ — множитель наращения по сложной ставке.

Последнее уравнение называется балансовым и описывает условие сбалансированности операции.

Определим K_2 через K_0 и подставим результат в балансовое уравнение. Получим

$$K_2 = (K_0 q^{t_1} - R_1) q^{t_2} - R_2,$$

$$[(K_0 q^{t_1} - R_1) q^{t_2} - R_2] q^{t_3} - R_3 = 0,$$

$$K_0 q^T - (R_1 q^{t_2+t_3} + R_2 q^{t_3} + R_3) = 0,$$

$$T = \sum_i t_i .$$

Из последнего уравнения видно, что финансово-кредитная операция может быть условно разделена на два встречных процесса:

- наращение первоначальной задолженности за весь период времени;
- наращение погашающих платежей за срок от момента платежа до конца операции.

Это уравнение можно преобразовать, умножив его на дисконтный множитель

$$v^T = \left(\frac{1}{1+i} \right)^T .$$

В результате получим

$$K_0 - (R_1 v^{t_1} + R_2 v^{t_1+t_2} + R_3 v^T) = 0 .$$

Таким образом, сумма современных величин погашающих платежей на момент выдачи кредита при полной сбалансированности равна сумме кредита.

Для общего случая n погашающих платежей балансовое уравнение получается аналогично и имеет вид

$$K_0 q^T - \sum_{j=1}^n R_j q^{T_j} = 0 ,$$

где $T_j = \sum_{r=j+1}^n t_r$ — время от момента платежа R_j до конца срока.

Если в каждом промежутке t_r действуют различные ставки i_r , то балансовое уравнение будет иметь вид

$$K_0 q_1^{t_1} q_2^{t_2} \cdots q_n^{t_n} - (R_1 q_n^{t_n} q_{n-1}^{t_{n-1}} \cdots q_2^{t_2} + R_2 q_n^{t_n} q_{n-1}^{t_{n-1}} \cdots q_3^{t_3} + \dots + R_{n-1} q_n^{t_n} + R_n) = 0 ,$$

где $q_r = 1 + i_r$, $r = 1, 2, \dots, n$. Принцип его получения такой же, как в предыдущих случаях.

На основе балансовых уравнений можно измерить доходность финансово-кредитной операции. Для этого нужно составить балансовое уравнение, в котором наращение или дисконтирование производится по неизвестной ставке, характеризующей полную доходность, а затем решить получившееся уравнение относительно искомой ставки.

3.3 Определение полной доходности ссудных операций с удержанием комиссионных

Показателем доходности ссудной операции без учёта комиссионных является годовая ставка сложных процентов, эквивалентная процентной ставке, используемой в данной операции. За открытие кредита и другие услуги кредитор часто взимает комиссионные, и это заметно повышает доходность операции для него, так как сумма, фактически выданная, сокращается.

Пусть ссуда в сумме D выдана на срок n . При её выдаче удерживаются комиссионные в размере G . То есть фактически выданная ссуда равна $(D - G)$. Сделка предусматривает начисление простых процентов по ставке i . Ставку полной доходности обозначим i_e . При определении доходности данной операции в виде годовой ставки сложных процентов мы исходим из того, что наращение величины $(D - G)$ по этой ставке должно дать тот же результат, что и наращение величины D по ставке простых процентов i .

Балансовое уравнение для этой операции имеет вид

$$(D - G)(1 + i_e)^n = D(1 + n \cdot i). \quad (3.1)$$

Чем больше размер комиссионных, тем больше эффективная ставка (ставка полной доходности). Рис. 3.2 графически иллюстрирует данное уравнение.

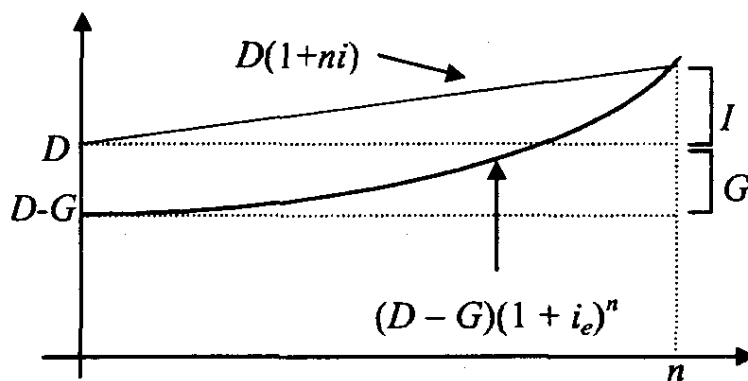


Рис. 3.2

Пусть $G = D \cdot g$, где g — процент комиссионных. Тогда, решая уравнение (3.1) относительно i_e , получим

$$i_e = \left(\frac{1 + n \cdot i}{1 - g} \right)^{1/n} - 1.$$

Эффективная ставка i_e непосредственно не фигурирует в условиях операции, она полностью определяется ставкой процента по кредиту и величиной комиссионных.

Ссуды с периодической выплатой процентов

Если комиссионные не выплачиваются, то доходность такой операции равна ставке сложных процентов, эквивалентной любой применяемой в данной сделке ставке.

Предположим, что предусмотрены комиссионные. Пусть ссуда D погашается через n лет, а проценты по простой ставке i выплачиваются регулярно один раз в конце года. Тогда размер выплачиваемых процентов равен $D \cdot i$. С учётом комиссионных сумма ссуды равна $D(1 - g)$. Запишем балансовое уравнение:

$$D(1 - g) - (D \cdot i \cdot a_{n, i_e} + Dv^n) = 0,$$

где $v = \frac{1}{1 + i_e}$; $a_{n, i_e} = \frac{1 - (1 + i_e)^{-n}}{i_e}$ — коэффициент приведения годовой ренты.

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$f(i_e) = v^n + i \cdot a_{n, i_e} - (1 - g) = 0.$$

Имеем нелинейное уравнение, которое необходимо решить относительно переменной i_e — ставки полной доходности. Точное решение данного уравнения в виде расчетной формулы для i_e получить невозможно. Искомую ставку можно определить приближенно, используя какой-либо численный метод.

Если проценты по кредиту выплачиваются p раз в год, то уравнение для определения доходности операции будет иметь вид

$$f(i_e) = v^n + i \cdot a_{n, i_e}^{(p)} - (1 - g) = 0,$$

где $a_{n, i_e}^{(p)} = \frac{1 - (1 + i_e)^{-n}}{p((1 + i_e)^{1/p} - 1)}$ — коэффициент приведения p -срочной ренты.

Ссуды с периодическими расходами

Пусть по ссуде периодически выплачиваются проценты и погашается основной долг, причем сумма расходов постоянна. Предполагаем, что платежи производятся один раз в конце года. Пусть R — ежегодная сумма по обслуживанию долга.

Если долг равен D , то из условия сбалансированности операции получим

$$D = Ra_{n,i},$$

где i — сложная ставка процента по кредиту. Отсюда

$$R = \frac{D}{a_{n,i}}.$$

Если комиссионные не выплачиваются, то эффективность такой операции в виде сложной годовой ставки процентов совпадает со ставкой по кредиту i . Если комиссионные выплачиваются, то заемщик на самом деле получает сумму, равную $D(1-g)$. Тогда балансовое уравнение будет иметь вид

$$D(1-g) - Ra_{n,i_e} = 0,$$

или

$$f(i_e) = a_{n,i_e} - a_{n,i}(1-g) = 0.$$

Искомую ставку i_e можно определить, используя численные методы.

Если погасительные платежи осуществляются p раз в год, то в данном уравнении коэффициент приведения годовой ренты $a_{n,i}$ необходимо заменить на коэффициент приведения p -срочной ренты $a_{n,i}^{(p)}$.

Погашение ссуды нерегулярным потоком платежей

До сих пор мы предполагали, что задолженность погашается равными платежами. Рассмотрим случай, когда задолженность погашается путем выплаты нерегулярного потока платежей: $R_1, R_2, \dots, R_n$.

Балансовое уравнение в этом случае записывается так:

$$f(i_e) = D(1 - g) - \sum_{j=1}^n R_j v^j = 0,$$

где $v = \frac{1}{1+i_e}$ — множитель дисконтирования по ставке полной доходности операции. Величина последнего взноса R_n в данном случае зависит от размеров предыдущих платежей и должна определяться из условия сбалансированности финансовой операции (последний платеж должен погашать задолженность), то есть

$$R_n = Dq^n - \sum_{j=1}^{n-1} R_j q^{T_j} = 0,$$

где T_j — срок от выплаты j -го платежа до конца сделки, $q = 1 + i$ — множитель наращения с использованием ставки по кредиту i .

3.4 Методы сравнения и анализа коммерческих контрактов

Анализ контрактов на основе метода капитализации платежей

В коммерческой практике часто бывают ситуации, когда один и тот же товар можно купить у разных поставщиков, каждый из которых предлагает свои условия продажи (цена, условия кредитования, оплаты сделки и т.д.). Поскольку как моменты выплаты денежных сумм, так и их размеры, как правило, для разных вариантов контрактов не совпадают, то эти условия часто бывают непосредственно не сопоставимы. Для обоснованного выбора наиболее выгодного варианта покупатель должен иметь некоторую аналитическую процедуру, позволяющую определять сопоставимые показатели стоимости контрактов, учитывающие все предусмотренные в контрактах условия.

Мы рассмотрим классический подход, основанный на сравнении современных величин всех платежей, предусматриваемых контрактами. Платежи приводятся к одному моменту времени, как правило, к началу срока действия соглашения. Вариант с наименьшей современной величиной с финансовой точки зрения

считается предпочтительным для покупателя, при приемлемости всех прочих условий.

При расчете современных величин для сравнения контрактов центральным моментом является выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование. Эту ставку называют **ставкой сравнения**. Чем выше эта ставка, тем более отдаленные платежи оказывают меньшее влияние на современную величину затрат. Таким образом, для инвесторов увеличение ставки сравнения делает предпочтительными контракты с более длительными сроками погашения задолженностей. Рассчитанные по принятой ставке сравнения показатели являются условными, однако установленный таким образом рейтинг контрактов оказывается устойчивым.

Рассмотрим сначала задачу, где конкурентными являются условия погашения задолженности. Пусть цена товара остается постоянной во всех вариантах. В общем случае ставки по кредиту могут быть разными. Чем больше срок кредита, тем больше ставка, поскольку необходимо компенсировать уменьшение стоимости более отдаленных платежей. Каждый вариант контракта оговаривает следующие основные условия погашения задолженности:

авансовые платежи, их размер и моменты выплаты;

продолжительность и условия выплаты процентов в льготном периоде, если он предусмотрен (в льготном периоде основной долг не погашается, а выплачиваются только проценты по основному долгу);

срок погашения задолженности;

метод погашения задолженности.

Задача состоит в том, чтобы выписать уравнения для расчета современных величин потоков платежей, предусматриваемых в конкурирующих контрактах. Поскольку в реальной практике может встретиться множество различных вариантов контрактов, то невозможно записать одну единственную формулу, пригодную для всех случаев. Поэтому рассмотрим несколько наиболее характерных вариантов.

Пример. Судостроительная фирма предлагает уплатить за стоимость заказа 8 млн. долларов. Предлагается два варианта оплаты:

– 5 % при заключении контракта, 5 % при спуске судна на воду через 6 месяцев и далее в течение 5 лет равные расходы по обслуживанию долга, то есть остаток долга погашается в течение 5 лет равными суммами. Льготный период в данном варианте не предусмотрен.

– 5 % при заключении контракта, 10 % при спуске судна на воду через 6 месяцев, предусмотрен льготный период, который начинается после выплаты второго авансового платежа и равен шести месяцам. В льготном периоде выплата процентов, начисленных по сложной ставке, предусматривается в конце этого периода. После окончания льготного периода погашение задолженности происходит в течение 8 лет равными платежами.

Процент за кредит в обоих вариантах $i = 10 \%$.

Примем ставку сравнения $q = 15 \%$. Это ставка, по которой производится дисконтирование всех платежей, предусмотренных контрактом.

Запишем уравнение для современной величины платежей по первому контракту. В нем предусмотрено два авансовых платежа Q_1 и Q_2 , причем второй платеж выплачивается в момент времени $t = 0,5$ года от начала действия контракта. Следовательно, его необходимо дисконтировать, умножив на множитель v^t , где $v = 1/(1+q)$ — множитель дисконтирования по ставке q . Процесс погашения остатка задолженности $D_1 = P - (Q_1 + Q_2)$ начинается с момента выплаты второго авансового платежа. Учитывая, что платежи поступают один раз в год в конце года, поток погашающих долг платежей можно рассматривать как постоянную годовую отложенную на t лет ренту с параметрами R_1, n_1 , современная величина которой определяется с использованием ставки, равной ставке сравнения q . Здесь n_1 — период времени, в течение которого погашается основной долг для первого варианта ($n_1=5$). Необходимо определить приведенную величину этой ренты на начальный момент времени. Современная величина ренты на момент выплаты второго авансового платежа равна $R_1 a_{n_1, q}$, а на начальный момент времени — $R_1 a_{n_1, q} v^t$. Размер отдельного погашающего платежа рассчитывается по формуле $R_1 = D_1 / a_{n_1, i}$.

Обратим внимание, что при расчете R_1 используется ставка по кредиту i .

Таким образом, математически процесс погашения задолженности (современная величина расходов) для первого варианта описывается уравнением

$$A_1 = Q_1 + Q_2 v^t + R_1 a_{n_1, q} v^t.$$

Рассмотрим второй вариант. В этом варианте предусмотрен льготный период. Следовательно, в уравнении для современной величины платежей необходимо учесть проценты, выплачиваемые в конце этого периода. Пусть L — продолжительность льготного периода, $D_2 = P - (Q_3 + Q_4)$, здесь Q_3, Q_4 — авансовые платежи. Тогда сумма процентов в льготном периоде равна $D_2[(1+i)^L - 1]$. Чтобы привести этот платеж к нулевому моменту, его необходимо умножить на множитель дисконтирования v^{t+L} . Погашение основного долга начинается после окончания льготного периода. Поток погашающих долг платежей — отложенная на $t+L$ лет рента. Современная величина дисконтированных на начальный момент погашающих платежей равна $R_2 a_{n_2, q} v^{t+L}$, где $R_2 = D_2 / a_{n_2, i}$. Уравнение для определения современной величины платежей по второму варианту формируется, как в первом варианте, и имеет вид

$$A_2 = Q_3 + Q_4 v^t + D[(1+i)^L - 1] v^{t+L} + R_2 a_{n_2, q} v^{t+L},$$

здесь n_2 — период времени, в течение которого погашается основной долг для второго варианта ($n_2=8$).

Проведя вычисления, получим:

$$A_1 = \$ 6\,710\,000, \quad A_2 = \$ 6\,382\,000.$$

Таким образом, согласно описанному методу, второй вариант оказался выгоднее, поскольку $A_2 < A_1$.

Получившиеся суммы условны и используются только для установления рейтинга контрактов. Можно показать, что если современная величина платежей по одному из сравниваемых контрактов больше, чем по другому, то такое же соотношение сохраняется и для других значений ставки сравнения, в случае если они превышают наибольшую из ставок сравниваемых контрактов

или если ставки сравнения меньше наименьшей из этих ставок. Другими словами, если для каких-либо двух контрактов $A_2 < A_1$, причем в первом контракте ставка по кредиту i_1 , а во втором i_2 , $i_1 > i_2$ при некоторой ставке сравнения q , то это же соотношение между A_2 и A_1 сохранится для всех других значений q , таких, что $q > i_1$, или для всех значений $q < i_2$.

Рассмотрим еще один типичный вариант контракта. Пусть условия контракта следующие: аванс в сумме Q выплачивается один раз в начале сделки, предусматривается разовая поставка товара спустя период времени t от момента заключения контракта, предусмотрен льготный период продолжительностью L , который начинается с момента поставки товара, погашение долга осуществляется равными выплатами, причем процесс погашения начинается с момента окончания льготного периода, проценты в льготном периоде выплачиваются периодически один раз в конце года, общий срок контракта $n + t + L$ лет.

Учитывая все эти условия, запишем уравнение, определяющее современную величину платежей по контракту:

$$A = Q + (P - Q) \left(\frac{a_{n,q}}{a_{n,i}} v^{t+L} + i \cdot a_{L,q} v^t \right).$$

В данном уравнении сумма ежегодных процентных платежей в льготном периоде равна $(P - Q)i$. Поскольку проценты выплачиваются периодически, начиная с момента поставки товара, поток этих платежей можно рассматривать как отложенную на t лет годовую ренту с параметрами $(P - Q)i, L, q$. Размер погашающих платежей равен $(P - Q)/a_{n,i}$. Поток этих платежей — отложенная на $t + L$ лет годовая рента.

Метод сравнения на основе определения предельных значений параметров контрактов

Задача сравнения контрактов может быть решена путём определения предельного (критического) значения цены или процентной ставки одного из двух сравниваемых контрактов.

Предельным значением параметра называется его величина, при которой сравниваемый контракт оказывается в финансовом

отношении эквивалентным другому, который выбран в качестве базового при сохранении других условий.

Такой подход к анализу контракта покупатель может применить при определении допустимых значений цены или процентной ставки, когда есть возможность вести переговоры об изменении условий одного из сравниваемых контрактов. Предположим, что в контрактах предусматриваются разовые расчёты за товар в конце срока сделки без авансовых платежей. Пусть параметры первого контракта: P_1 — цена, i_1 — процентная ставка, n_1 — срок оплаты. Соответствующие параметры второго контракта — P_2, i_2, n_2 . Рассмотрим две задачи.

1. Найти предельное значение ставки i_2 (значения P_2, n_2 фиксированы), при котором второй вариант будет эквивалентен первому.

2. Определить цену P_2 (i_2, n_2 фиксированы), при которой второй вариант эквивалентен первому.

Из условия равенства современных величин расходов по двум вариантам контракта можно записать:

$$P_1 \left(\frac{1+i_1}{1+q} \right)^{n_1} = P_2 \left(\frac{1+i_2}{1+q} \right)^{n_2}.$$

Решая первую задачу, из этого уравнения находим предельное значение ставки i_2^* :

$$i_2^* = (1+q) \left[\frac{P_1 \left(\frac{1+i_1}{1+q} \right)^{n_1}}{P_2} \right]^{1/n_2} - 1.$$

Правило выбора с точки зрения покупателя: условия второго варианта будут хуже условий первого, если ставки $i_2 > i_2^*$; будут равноценны, если $i_2 = i_2^*$; будут лучше, если $i_2 < i_2^*$.

Решая вторую задачу, находим предельное значение цены P_2^* :

$$P_2^* = P_1 \frac{(1+i_1)^{n_1}}{(1+i_2)^{n_2} (1+q)^{n_1-n_2}}.$$

Правило выбора; второе соглашение эквивалентно первому, если $P_2 = P_2^*$, выгоднее для покупателя, если $P_2 < P_2^*$.

Очевидно, что i_2^* и P_2^* существенно зависят от сроков кредитования и принятой ставки сравнения q .

Если сроки одинаковы ($n_1 = n_2 = n$), то i_2^* и P_2^* не зависят от ставки q . Тогда

$$i_2^* = (1 + i_1) \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{1/n} - 1, \quad P_2^* = P_1 \left(\frac{1 + i_1}{1 + i_2} \right)^n.$$

Мы рассмотрели случай, когда погашение кредита производится разовым платежом в конце срока. Предположим теперь, что кредит погашается равными периодическими выплатами. Тогда предельные процентные ставки по кредиту определяются из условия равенства современных величин потоков платежей, предусматриваемых контрактами:

$$P_1 \frac{a_{n_1, q}}{a_{n_1, i_1}} = P_2 \frac{a_{n_2, q}}{a_{n_2, i_2}}.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$a_{n_2, i_2^*} = \frac{1 - (1 + i_2^*)^{-n_2}}{i_2^*} = \frac{P_2}{P_1} \frac{a_{n_2, q}}{a_{n_1, q}} a_{n_1, i_1}.$$

Ставку i_2^* определим, решая данное уравнение численно. Предельное значение цены определяется соотношением

$$P_2^* = P_1 \frac{a_{n_2, i_2}}{a_{n_1, i_1}} \frac{a_{n_1, q}}{a_{n_2, q}}.$$

3.5 Планирование погашения долгосрочной задолженности

Расходы по обслуживанию долга

Можно выделить три основные цели анализа долгосрочной задолженности:

- достижение полной сбалансированности займа, то есть соответствия его параметров принятым условиям финансового соглашения;
- оценка стоимости займа на любой момент его жизни с учётом всех будущих поступлений по нему;

– определение эффективности финансовой операции для кредитора.

Достижение сбалансированности параметров займа осуществляется путём планирования погашения займа. Планирование заключается в определении периодических расходов, связанных с займом. Такие расходы называют *обслуживанием долга*. Разовую сумму по обслуживанию долга называют *срочной уплатой*. Срочные уплаты включают:

- текущие процентные платежи;
- средства, предназначенные для погашения (амортизации) основного долга.

Методы определения размера срочных уплат зависят от условий займа. Эти условия предусматривают срок, продолжительность льготного периода (при его наличии), уровень процентной ставки, метод погашения и уплаты процентов и основной суммы долга.

Обычно проценты выплачиваются на протяжении всего срока займа периодически. Иногда они начисляются и присоединяются к основной сумме долга. Основная сумма чаще всего погашается частями, причём размеры платежей по погашению (срочная уплата) могут быть одинаковы или могут изменяться.

В льготном периоде основная сумма долга не погашается, проценты могут выплачиваться периодическими платежами, или в конце периода одним платежом, или вообще не выплачиваться, а присоединяться к основной сумме долга.

Пусть D — сумма задолженности,

I — проценты по займу,

L — продолжительность льготного периода,

R — годовые расходы по погашению основной суммы долга,

g — ставка процентов по условиям займа,

Y — срочная уплата.

В периоде, когда погашается основная сумма долга, срочная уплата состоит из двух элементов: $Y = R + I$. В льготном периоде $Y = I$.

Методы расчёта существенно зависят от вида займа. Основной признак классификации займов — метод погашения займа. Различают следующие виды займов:

- Займы без обязательного погашения («вечные облигации») — заёмщик обязуется выплачивать кредитору в определённые сроки доход в виде фиксированного процента, занятая сумма не возвращается. Заёмщик оставляет за собой право выкупить или погасить все выпущенные долговые обязательства в любое время.
- Займы с обязательным погашением в один срок. Заёмщик возвращает занятую сумму в оговоренный срок и выплачивает проценты периодически или в конце срока.
- Займы с обязательным погашением в несколько сроков. Заёмщик возвращает занятую сумму по частям и регулярно выплачивает доход от займа в виде процентов.

Формирование фонда

Для обеспечения возврата долга обычно создаётся погасительный фонд. Иногда это оговаривается в договоре выдачи займа. Фонд формируется из последовательных взносов, на которые начисляются проценты (например, счёт в банке). Понятно, это имеет смысл, если у заемщика есть возможность получать на деньги погасительного фонда большие проценты, чем те, под которые он взял заем. Возможны различные варианты формирования фонда и выплаты долга. Мы рассмотрим три варианта:

1. Основной долг погашается из фонда в конце срока разовым платежом. Сумма взносов в фонд с процентами на них должна быть равна долгу на момент его уплаты. Проценты по долгу выплачиваются не из фонда.

2. Условия финансового обязательства вместо периодической выплаты процентов предусматривают их присоединение к сумме основного долга.

3. Фонд формируется таким образом, чтобы обеспечить периодическую выплату процентов по долгу (из фонда) и в конце срока возврат основного долга.

Рассмотрим первый вариант. Пусть накопление средств в фонде производится путём регулярных ежегодных взносов, размер которых равен R , и на эти взносы начисляются проценты по ставке i . Одновременно происходит выплата процентов, начисляемых на долг по ставке g (проценты выплачиваются не из

фонда). Тогда срочная уплата $Y = Dg + R$, где Dg — проценты по долгу, R — платежи в фонд.

Фонд должен быть накоплен за n лет. Платежи в фонд представляют собой ренту с параметрами R, n, i . Зная размер долга, легко определить разовый взнос в фонд:

$$R = \frac{D}{s_{n,i}}.$$

С учетом этого, срочная уплата

$$Y = D\left(g + \frac{1}{s_{n,i}}\right).$$

Если условия финансового обязательства предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга (второй вариант), то взносы в фонд к концу срока должны обеспечить накопление суммы $D(1+g)^n$. В этом случае

$$Y = \frac{D(1+g)^n}{s_{n,i}}.$$

Ставка i характеризует скорость роста погасительного фонда, а ставка g — сумму выплачиваемых за заём процентов.

Рассмотрим третий вариант формирования фонда. Пусть кредит погашается следующим образом:

- в начале каждого года вносятся равные суммы R в погасительный фонд;
- проценты по кредиту начинают погашаться после первого начисления процентов на взносы в фонд;
- кредитору проценты выплачиваются из фонда;
- в конце срока выплачивается основной долг плюс проценты за последний год по кредиту.

Особенностью данной задачи является то, что: а) взносы в фонд осуществляются не в конце года, как мы предполагали ранее, а в начале; б) проценты по кредиту выплачиваются периодически из фонда.

Рассмотрим процесс формирования фонда. Первая выплата в фонд в сумме R осуществляется в момент взятия кредита. На сумму R начисляются проценты за n лет (n — общий срок кредита) по сложной ставке i . В конце срока эта сумма будет равна

$R(1+i)^n$. В начале второго года в фонд вносится сумма R и выплачиваются из фонда проценты по долгу G . Таким образом, фактически в фонд вносится сумма $(R-G)$. На неё будут начисляться проценты в течение $(n-1)$ лет, к концу срока получим сумму $(R-G)(1+i)^{n-1}$. В начале третьего года вносим в фонд сумму R и одновременно берём из фонда сумму G . На этот взнос (за вычетом процентов по долгу) будут начисляться проценты в течение $(n-2)$ лет. В результате к концу срока получим сумму $(R-G)(1+i)^{n-2}$. Последний взнос в фонд осуществляется в момент времени $(n-1)$, и он вместе с начисленными процентами (с учетом изъятия из фонда суммы процентов по долгу) даст сумму $(R-G)(1+i)$. В конце срока необходимо обеспечить выплату суммы, размер которой равен $(D+G)$ (основной долг плюс проценты по долгу за последний год).

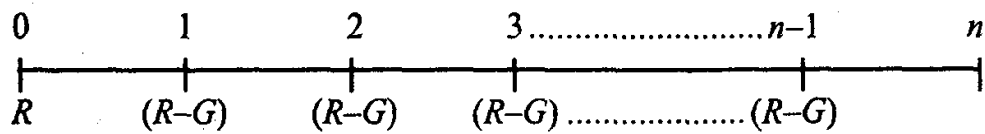


Рис. 3.3

Составим балансовое уравнение. В нем все взносы в фонд за вычетом процентов по долгу, с учётом начисления на них процентов в фонде, приравниваем к сумме долга плюс проценты за последний год. Имеем

$$R(1+i)^n + (R-G)(1+i)^{n-1} + \dots + (R-G)(1+i)^2 + (R-G)(1+i) = D + G.$$

Из этого уравнения необходимо определить размер взносов в фонд R .

После несложных преобразований балансовое уравнение можно записать в виде

$$R \sum_{k=1}^n (1+i)^k - G \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^k = D.$$

Заметим, что $\sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^k$ — множитель наращения годовой ренты, который можно записать так: $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{n,i}$. Кроме того, имеем

$$\sum_{k=1}^n (1+i)^k = (1+i) \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^k.$$

С учётом этих соотношений балансовое уравнение запишется следующим образом:

$$R \frac{(1+i)((1+i)^n - 1)}{i} - G \frac{(1+i)^n - 1}{i} = D.$$

Решая его, определим величину взноса в фонд:

$$R = \frac{D}{(1+i)s_{n,i}} + \frac{G}{1+i}.$$

Как видно из полученного соотношения, взнос в фонд формируется из двух составляющих: первое слагаемое — это сумма, которая обеспечивает выплату основного долга (заметим, что здесь присутствует множитель $(1+i)$, который отражает тот факт, что выплаты в фонд осуществляются в начале года); второе слагаемое — это сумма, которая обеспечивает периодическое погашение процентов по долгу платежами из фонда.

Погашение долга в рассрочку равными платежами

Один из способов погашения долга в рассрочку — погашение равными суммами.

Пусть заём D погашается в течение n лет равными платежами. Тогда сумма, ежегодно идущая на погашение долга, равна d , где $d = D/n$. Помимо погашения основного долга, должник выплачивает проценты на остаток долга. Будем предполагать, что проценты выплачиваются один раз в конце года по ставке g . Тогда первая уплата процентов в конце первого года равна Dg . В конце второго года сумма процентов равна $(D - D/n)g$. В конце третьего года — $(D - 2(D/n))g$ и так далее.

Платежи по срочным уплатам формируются следующим образом:

Первая уплата: $Y_1 = D(1/n + g)$.

Вторая уплата: $Y_2 = D/n + (D - D/n)g$.

Третья уплата: $Y_3 = D/n + (D - 2(D/n))g$.

Срочная уплата на произвольный момент времени t :

$$Y_t = D_t g + d,$$

где D_t — остаток долга на начало года t ($t = 1, 2, \dots, n$), определяемый следующим рекуррентным соотношением:

$$D_{t+1} = D_t - D/n, \quad D_1 = D.$$

Погашение долга в рассрочку равными срочными платежами

На протяжении всего срока погашения регулярно выплачивается постоянная срочная уплата, часть её идёт в погашение долга, а часть — в погашение процентов за заём. Величина долга убывает после каждой выплаты. Однако в связи с уменьшением выплат по процентам с течением времени увеличиваются суммы, идущие на погашение основного долга. Такой способ называют прогрессивным погашением. Срочная уплата

$$Y = D_t g + d_t = \text{const}.$$

Периодически выплачиваемые суммы Y можно рассматривать как постоянную годовую ренту, член которой определяется по формуле:

$$Y = \frac{D_1}{a_{n,g}}.$$

Определим структуру срочной уплаты, то есть ту её часть, которая идёт на погашение основного долга, и часть, которая идет на погашение процентов.

Размер первого погасительного платежа $d_1 = Y - D_1 g$.

Так как $D_1 = Ya_{n,g}$, то $d_1 = Y(1 - g \cdot a_{n,g}) = Yv^n$, где $v = \frac{1}{1+g}$.

Далее

$d_2 = Y - D_2 g = Y - (D_1 - d_1)g$ (здесь учтено, что $D_2 = D_1 - d_1$) или $d_2 = Yv^n + Yv^n g = Yv^{n-1} = d_1(1+g)$.

Для платежа в момент времени t имеем

$$d_t = Yv^{n-(t-1)}, \text{ или } d_t = d_1(1+g)^{t-1}.$$

Таким образом, можно выписать следующую систему соотношений.

Размер погасительного платежа в году t :

$$d_t = Y - D_t g = d_{t-1}(1 + g), \quad t = 1, 2, \dots, n;$$

$$d_1 = Y - D_1 g = Yv^n = D_1 v^n / a_{n,g} = D_1 / s_{n,g}.$$

Остаток долга на начало года $t + 1$:

$$D_{t+1} = D_t - d_t = D_t(1 + g) - Y.$$

Сумма погашенного долга на начало года $t + 1$:

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1(1 + g)^k = d_1 s_{t,g},$$

где $s_{t,g}$ — коэффициент наращения годовой ренты, срок которой равен t лет.

Если погасительные платежи и проценты выплачиваются p раз в год, то данная задача решается аналогично, только применяются соответствующие формулы для p -срочных рент.

Глава 4. АНАЛИЗ РЕАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

Задача анализа и оценки финансовой эффективности инвестиционных проектов с целью отбора наиболее эффективного проекта является одной из основных в управлении финансами.

В широком смысле термин «инвестировать» означает любое вложение денежных средств с целью получения доходов в будущем. Различают два вида инвестиций — реальные и финансовые.

Реальные инвестиции (real investments) означают инвестиции в какой-либо тип материальных активов, таких, как земля, оборудование, заводы.

Финансовые инвестиции (financial investments) — это контракты, зафиксированные на бумаге, такие, как обыкновенные акции и облигации.

В развитых экономиках большая часть инвестиций относится к финансовым инвестициям.

Основным объектом математического моделирования и анализа в данном случае является поток платежей, а именно суммы распределённых во времени денежных расходов и поступлений, предполагаемых в результате реализации инвестиционного проекта. При этом важную роль играют два фактора, которые связаны с инвестиционным процессом, — время и риск. Например, при инвестировании в ценные бумаги с фиксированным доходом (облигации) важнейшим фактором будет время, при инвестировании в рискованные ценные бумаги (обыкновенные акции) существенными являются и время, и риск.

С финансовой точки зрения инвестиционный проект объединяет два противоположных процесса:

- вложения денежных средств (с целью создания производственного объекта, накопления капитала и т.д.);
- последовательное получение дохода.

Эти процессы могут протекать последовательно, с разрывом между ними или без, на некоторых отрезках времени параллельно (в этом случае отдача от инвестиций начинается до полного завершения вложений). Оба этих процесса могут иметь разное распределение во времени.

Анализ инвестиций заключается в основном в оценивании и сравнении эффективности альтернативных инвестиционных проектов. Оценка эффективности осуществляется с помощью расчёта системы показателей. Методы оценки эффективности проектов, которые рассматриваются в данной главе, основаны на фундаментальном в финансовом анализе принципе дисконтирования потоков платежей, а именно на приведении инвестиционных расходов и доходов к одному моменту времени (обычно на начало реализации проекта). При этом наиболее важным моментом является выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование. В анализе реальных инвестиций эту ставку называют ставкой сравнения.

Рассмотрим это понятие более подробно на примере.

Пусть фирма — производитель бытовой техники — задумывает приобрести роботизированный комплекс для окраски поверхности изделий стоимостью в \$1 000 000. Принимая во внимание заработную плату оператора, обслуживающего комплекс, заработную плату рабочих, которых он должен заменить, а также расходы на эксплуатацию комплекса, фирма оценивает экономию от внедрения в \$120 000 в год.

Вопрос: стоит ли тратить \$1 000 000 сегодня, чтобы каждый год экономить \$120 000, но в будущем?

Ответ на этот вопрос зависит от альтернативной стоимости получения \$1 000 000 этой фирмой. Если фирме для этого приобретения придётся брать ссуду, то альтернативная стоимость будет отражать норму процента, взимаемого кредитором.

Если планируется истратить собственные денежные средства, то альтернативная стоимость определяется доходом, который это предприятие могло бы получить, используя \$1 000 000 на альтернативные (возможно, более прибыльные) цели. Например, если бы фирма приобрела облигации, то альтернативная стоимость вложения капитала в новый комплекс была бы равна рыночной норме процента прибыли на эти ценные бумаги.

Можно сказать, что независимо от характера средств, то есть заёмные они или собственные, их альтернативная стоимость соответствует преобладающей на рынке норме процента. В рыночной экономике не существует единой нормы процента, имеется целое семейство процентных ставок (например, ставки по

краткосрочным и долгосрочным ссудам, ставки по облигациям разных видов и т.д.). Эту рыночную ставку нужно рассматривать как некоторую условную величину, отражающую характерную норму процента из всего её многообразия, существующего на финансовых рынках.

Предположим, что норма процента равна 10 % годовых. Это означает, что каким-либо способом фирма может получить \$ 100 000 в год, вложив свои средства в размере \$1 000 000, которые предназначались для покупки комплекса. Поскольку это меньше чем \$120 000, то данный инвестиционный проект заслуживает внимания.

Пусть, далее, фирма хочет купить автоматическую линию для упаковки изделий стоимостью \$500 000, а прибыль от ее эксплуатации –\$40 000 в год. При альтернативных вложениях мы получили бы \$50 000 в год. Вывод: в данной ситуации (при рыночной ставке 10 %) вложения в упаковочную линию невыгодны. Если рыночная ставка равна 7 % годовых, то в этом случае заём в \$500 000 будет стоить \$35 000 в год и данное вложение становится выгодным. С другой стороны, очевидно, что если ставка будет расти, то и первый проект (вложения в роботизированный комплекс) может стать невыгодным.

Из данного примера можно сделать следующий вывод: эффективность инвестиций и, следовательно, активность инвесторов зависят от преобладающей на рынке нормы процента. Чем ниже норма процента, тем выше уровень инвестиционных расходов, выгодных инвестору.

Выбор конкретной ставки должен осуществляться на основе экономического анализа, производимого инвестором. Чем выше ставка, тем в большей мере отражается фактор времени — более отдалённые платежи оказывают меньшее влияние на современную величину потока платежей. Размеры современных величин доходов от вложений являются условными характеристиками, поскольку в существенной мере зависят от принятой для будущего ставки сравнения — рыночной нормы процента.

Как было отмечено выше, важным фактором при анализе инвестиций является учёт риска. В инвестиционном процессе риск проявляется в виде возможного уменьшения реальной отдачи от вложений по сравнению с ожидаемой. Оценка эффективно-

сти проекта зависит от правильного выбора процентной ставки, по которой производится капитализация платежей. В качестве рекомендации по учёту риска предлагается вводить поправку к уровню процентной ставки, то есть добавлять некоторую рисковую премию.

В данной теме рассматриваются методы моделирования и анализа инвестиционных процессов, связанных с реальными инвестициями. В последующих темах описаны модели и методы анализа финансовых инвестиций.

В финансовом анализе реальных инвестиций применяют четыре основных показателя:

- чистый приведённый доход;
- внутренняя норма доходности;
- срок окупаемости;
- индекс рентабельности.

4.1 Чистый приведенный доход

Для данного показателя в финансовой литературе широко используется следующее сокращенное обозначение: *NVP* от английского термина Net Present Value.

NPV используется в практике крупных и средних предприятий. Допущения, принимаемые при определении *NVP*:

- потоки денежных средств на весь период реализации проекта известны;
- определена оценка процентной рыночной ставки для будущего (на весь период реализации проекта).

Чистый приведенный доход (*NVP*) — это разность дисконтированных по ставке сравнения на один момент времени (обычно на начало реализации проекта) потоков доходов и вложений.

Эта величина характеризует абсолютный результат инвестиционной деятельности. Рассмотрим последовательно модели различных наиболее характерных вариантов инвестиционных процессов, на основе которых рассчитывается *NPV*, начиная с простейших.

1. Пусть инвестиции осуществляются одним платежом в начальный момент времени. Отдача от инвестиций поступает один раз в год в конце года в течение n лет. Обозначим K — размер инвестиций, E — размер ежегодного дохода, W — чистый приведенный доход. Таким образом, очевидно, поток доходов можно рассматривать как годовую ренту. Тогда, в соответствии с определением, чистый приведенный доход

$$W = E \frac{1 - (1 + q)^{-n}}{q} - K,$$

где q — ставка сравнения, первое слагаемое — современная величина потока доходов.

Правило принятия решения на основе NVP состоит в следующем: если W больше нуля, то проект принимается к рассмотрению. Если W равен нулю, то доходы только окупают вложения и прибыли не приносят. Если W меньше нуля, то проект убыточен. При анализе нескольких альтернативных проектов, при прочих равных условиях предпочтение отдается проекту с наибольшим NVP .

2. Пусть вложения и поступления — равномерные дискретные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Процесс отдачи начинается сразу после завершения вложений.

Обозначим n_1 — продолжительность периода вложений (в годах), n_2 — продолжительность периода отдачи от вложений, K — размер ежегодных вложений, E — размер ежегодных поступлений.

Потоки доходов и расходов дисконтируем на начальный момент времени. Расходы представляют собой годовую ренту со сроком n_1 . Следовательно, приведенная величина расходов равна $Ka_{n_1, q}$. Доходы — отложенная на n_1 год годовая рента, все платежи которой нужно привести на нулевой момент времени. Современная величина такой ренты определяется по формуле $Ea_{n_2, q}v^{n_1}$, где v — множитель дисконтирования по ставке q . Таким образом, уравнение для определения NPV в этом случае будет иметь вид

$$W = Ea_{n_2, q}v^{n_1} - Ka_{n_1, q}.$$

Замечание. Если процессы вложений и отдачи описываются p -срочными рентами (параметры p у них могут быть разными), то, очевидно, в данном уравнении необходимо использовать коэффициенты приведения соответствующих p -срочных рент.

3. Предположим, что инвестиционные затраты и доходы разделяются на два неравномерных потока платежей, причем процесс отдачи от инвестиций начинается сразу после окончания вложений и все платежи поступают в конце года. Пусть E_j — размеры доходов в году j ($j=1,2,\dots,n_2$), K_t — инвестиционные расходы в году t ($t=1,2,\dots,n_1$). Сумма дисконтированных вложений определяется по формуле для современной величины переменного потока платежей (см. п. 2.12) и равна $\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t$. Рассмотрим отдельный платеж E_j . Дисконтируем его на момент начала инвестиционного проекта. Очевидно, дисконтированная величина этого платежа равна $v^{n_1} E_j v^j$. Сумма дисконтированных платежей E_j даст современную величину потока доходов $v^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} E_j v^j$. Уравнение для NPV имеет вид

$$W = v^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} E_j v^j - \sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t.$$

Мы предполагали, что процесс отдачи начинается сразу после окончания вложений. Если отдача начинается спустя n лет после начала осуществления проекта и $n > n_1$, то в данной формуле вместо множителя v^{n_1} необходимо использовать множитель v^n .

4. Предположим, что процессы вложения и отдачи задаются в виде единого неравномерного потока платежей, поступающих один раз в конце года. Это означает, что процессы вложения и получения доходов могут протекать как последовательно, так и параллельно.

Обозначим R_t — размер отдельного платежа. Тогда чистый приведенный доход определится по формуле

Мы предполагали, что процесс отдачи начинается сразу после окончания вложений. Если отдача начинается спустя n лет после начала осуществления проекта и $n > n_1$, то в данной формуле вместо множителя v^{n_1} необходимо использовать множитель v^n .

4. Предположим, что процессы вложения и отдачи задаются в виде единого неравномерного потока платежей, поступающих один раз в конце года. Это означает, что процессы вложения и получения доходов могут протекать как последовательно, так и параллельно.

Обозначим R_t — размер отдельного платежа. Тогда чистый приведенный доход определится по формуле

$$W = \sum_t R_t v^t, \quad t = 1, 2, \dots, n_1 + n_2,$$

где $n_1 + n_2$ — полный срок осуществления проекта. В этой формуле платежи R_t , соответствующие вложениям, берутся со знаком «минус».

Чистый приведённый доход до сих пор мы определяли приведением всех платежей к началу инвестиционного процесса. На практике может потребоваться оценка этого показателя на некоторый другой момент времени t .

Обозначим W_0 — чистый приведённый доход на начальный момент времени.

W_t — чистый приведённый доход на момент времени t . Тогда, очевидно,

$$W_t = W_0(1 + q)^t.$$

Наиболее предпочтительный вариант проекта остаётся таковым при оценке NPV на любой момент времени t .

На практике для более надёжных выводов рекомендуется величину чистого приведённого дохода определять не для единственного значения ставки сравнения q , а для некоторого диапазона значений этой ставки.

На рис. 4.1 показана зависимость величины чистого приведенного дохода от ставки сравнения для случая, когда вложения осуществляются единым платежом, а поступления — равномерный поток платежей. При $q = q_0$ чистый приведенный доход $W = 0$.

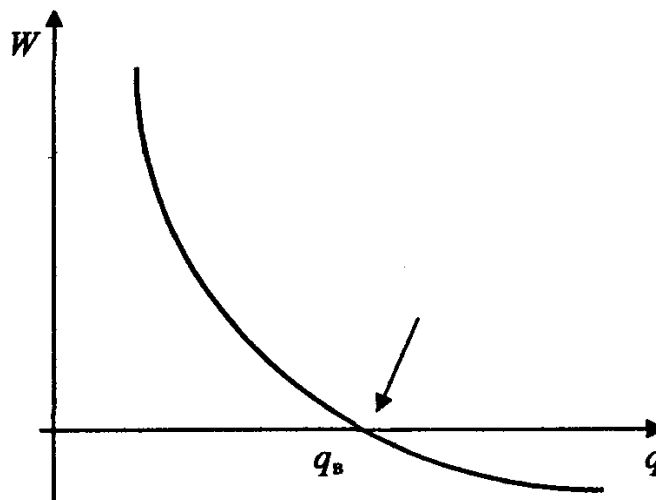


Рис. 4.1

4.2 Внутренняя норма доходности

Для данного показателя в финансовой литературе часто используют сокращенное обозначение **IRR** (от английского термина Internal Rate of Return).

Под IRR понимают расчётную ставку процентов, при которой капитализация получаемого дохода даёт сумму, равную приведённым инвестициям, и, следовательно, инвестиционные вложения являются окупаемой операцией.

Экономический смысл данного показателя заключается в том, что в случае, если вложения предшествуют потоку доходов, он даёт предельное значение нормы дисконтирования, при которой проект еще остается выгодным.

Другими словами, если проект финансируется только за счёт привлечённых средств, то значение IRR показывает верхнюю границу допустимого уровня банковской процентной ставки, превышение которой делает проект убыточным. Обозначим q_6 — внутреннюю норму доходности. Если кредит получен по ставке i , то разность $(q_6 - i)$ характеризует эффективность инвестиционной деятельности. Если $(q_6 - i) = 0$, то доход только окупает инвестиции, если $q_6 < i$, то инвестиции убыточны. При сравнении различных проектов выбираем тот, у которого этот показатель выше. Рассмотрим метод расчета IRR.

Если инвестиции и отдача от них задаются в виде единого потока платежей, то тогда q_6 определяется как положительный корень уравнения:

$$\sum_{t=1}^n R_t v^t = 0,$$

где $v = \frac{1}{1 + q_6}$ — множитель дисконтирования по искомой ставке q_6 , n — общий срок реализации проекта. Выражение слева в данном уравнении есть многочлен степени n относительно переменной $(1 + q_6)^{-1}$, коэффициенты которого — компоненты потока платежей. Таким образом, задача сводится к определению корней данного многочлена. В общем случае этот многочлен имеет n

корней, среди которых могут быть положительные, отрицательные и комплексно-сопряжённые. Очевидно, экономический смысл имеют только положительные корни. По теореме Декарта, число положительных корней многочлена не превосходит числа перемен знака его коэффициентов. Следовательно, если вложения предшествуют процессу отдачи, уравнение имеет единственное положительное решение, и расчет показателя IRR имеет смысл. Если вложения чередуются с отдачей, в этом случае однозначного решения не существует, и применение данного показателя является некорректным.

Решить это уравнение можно только численно.

Рассмотренные в предыдущем разделе модели инвестиционных процессов также можно использовать для определения внутренней нормы доходности, если в соответствующих уравнениях положить $W = 0$ и дисконтирование проводить по искомой ставке q_0 .

4.3 Срок окупаемости

Под **сроком окупаемости** понимают продолжительность периода, в течение которого сумма доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, становится равной сумме инвестиций, приведённых к тому же моменту времени. Дисконтирование осуществляется по ставке сравнения. Подчеркнем, что при определении срока окупаемости, в отличие от других показателей, все платежи приводятся на момент завершения инвестиций (или, что то же самое, на момент начала периода отдачи).

Рассмотрим способы определения этого показателя, начиная с наиболее простой модели инвестиций, соответствующей первому варианту из раздела 4.2. В этом случае срок окупаемости можно определить из уравнения

$$E \frac{1 - (1 + q)^{-n_{ок}}}{q} = K.$$

Решая это уравнение относительно переменной $n_{ок}$, получим

$$n_{ок} = - \frac{\ln(1 - \frac{K}{E} q)}{\ln(1 + q)}.$$

Из этой формулы видно, что не всякий уровень дохода приводит к окупаемости инвестиций. Срок окупаемости будет конечной величиной, если $E > qK$ (формально это следует из свойств логарифмической функции).

Рассмотрим, как определяется срок окупаемости $n_{ок}$ в общем случае.

Пусть K — приведённая к началу периода отдачи величина инвестиций (то есть K — наращенная сумма всех платежей, которые составляют вложения).

Пусть доходы — произвольный поток поступлений. Тогда срок окупаемости $n_{ок}$ определяется суммированием доходов, дисконтированных по ставке q до тех пор, пока не получим сумму, равную объёму инвестиций. Алгоритм определения $n_{ок}$ состоит в следующем. Последовательно определяем величины

$S_m = \sum_{t=1}^m R_t v^t$ для $m = 1, 2, \dots, n_2$ (здесь n_2 — продолжительность периода отдачи от вложений). Как только при некотором значении m выполняются неравенства $S_m < K < S_{m+1}$, то полагаем, что $n_{ок} = m + \Delta$, где m — целое число лет, Δ — доля года, которая приближенно оценивается по формуле

$$\Delta \approx \frac{K - S_m}{R_{m+1} v^{m+1}}.$$

Основной недостаток показателя $n_{ок}$ как меры эффективности инвестиций заключается в том, что он не учитывает весь период осуществления проекта и на него не влияет отдача, которая лежит за пределами этого срока. Поэтому рекомендуется этот показатель использовать только как ограничение при принятии решения. Инвестор определяет для себя некоторое критическое значение срока окупаемости $n_{кр}$, которое еще удовлетворяет его, и если срок окупаемости анализируемого проекта $n_{ок} > n_{кр}$, то проект заведомо не принимается. Только после этого сравнение проектов осуществляется по остальным показателям.

4.4 Индекс рентабельности

Индекс рентабельности показывает, сколько денежных единиц современной стоимости будущего денежного потока доходов приходится на одну денежную единицу приведенных инвестиций.

Предположим, что инвестиционные расходы и доходы — переменные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Тогда индекс рентабельности определяется по формуле

$$U = \frac{v^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} E_j v^j}{\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t}.$$

Здесь в числителе — современная величина потока доходов на момент начала инвестиционного проекта, в знаменателе — инвестиционные расходы, дисконтированные на этот же момент времени.

Если $U > 1$, то проект принимается к рассмотрению; если $U = 1$, то проект не приносит прибыли, а только окупается; при $U < 1$ проект нерентабелен. Из нескольких проектов выбирается тот, у которого индекс рентабельности наибольший. Очевидно, применение этого показателя корректно, если инвестиции и доходы идут последовательно.

Недостаток всех показателей. Все рассмотренные показатели предполагают известными используемые при их расчете параметры будущих расходов и доходов, их размеры и время выплат или поступлений. В реальной ситуации эти величины можно определить и спрогнозировать только приблизительно. Кроме того, результат расчета этих показателей эффективности, за исключением внутренней нормы доходности, существенно зависит от выбора ставки сравнения. Ставка оценивается субъективно финансовым аналитиком, и, следовательно, все расчеты с использованием этой ставки также носят условный характер. В связи с этим для уменьшения неопределенности при принятии решений, основанных на расчете рассмотренных показателей, рекомендуется использовать сценарный подход. Он заключается в следующем. Сначала получают оценки показателей эффективности для

некоторого базового сценария. В этом сценарии используются наиболее вероятные условия функционирования данного инвестиционного проекта. Затем аналогичные оценки получают для наихудшего варианта (пессимистичного) и для наилучшего (оптимистичного).

4.5 Модель инвестиций в человеческий капитал

В данном разделе на основе применения рассмотренного выше подхода к анализу инвестиций мы попытаемся ответить на вопрос: стоит ли образование того, чтобы платить за него из своего кармана, и сколько стоит платить.

Рассмотрим модель инвестиций в человеческий капитал. Модель будем строить при следующих предположениях.

Труд образованного и профессионально подготовленного человека производительнее, чем необученного. Следовательно, вложения в образование создают так называемый человеческий капитал, который в дальнейшем должен окупаться и приносить прибыль.

Люди как потребители заинтересованы в максимизации доходов всей жизни в целом, а не отдельного периода.

Существует прямая зависимость между образовательным уровнем работника и его потенциальными заработками.

Люди принимают решение о вложении в свое образование на основе сопоставления связанных с этим затрат и выгод.

Выгоды образования состоят в ожидаемых будущих более высоких доходах.

Затраты имеют две формы:

- а) явные затраты на курс обучения;
- б) скрытые затраты, а именно упущенные в течение обучения заработки.

Выгоды и затраты относятся к разным периодам времени, и поэтому каждый человек, принимая решение об образовании, должен сравнить сегодняшнюю ценность ожидаемых выгод с сегодняшней ценностью ожидаемых затрат.

Рассмотрим индивида, который хочет максимизировать чистый приведенный доход всех своих будущих поступлений. Предположим, что он решает вопрос: получать ли ему дополнительное

образование еще в течение одного года. Обозначим C — затраты на образование в течение дополнительного года (плата за обучение плюс упущенные заработки). Эту величину необходимо сравнить с ожидаемыми выгодами более высоких заработков, предоставляемых рынком труда. Пусть B_t — ожидаемый дополнительный годовой заработок в году t , g — рыночная норма процента, N — продолжительность предстоящей трудовой жизни данного индивида. Тогда приведенная величина выгод определяется как

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{B_t}{(1+g)^t}.$$

Разность $(P - C)$ — чистый приведенный доход от образования.

Если $(P - C) > 0$, то с финансовой точки зрения имеет смысл поучиться еще год. Очевидно, чем меньше C и g , а также чем выше доходы и больше N , тем выгоднее вкладывать деньги в образование.

Пусть зарплата индивидуума 48 000 в год. Если он проучится еще один год, заплатив за курс обучения 20 000, то его зарплата возрастет. Определим, на какую величину должна возрасти его зарплата, чтобы было выгодно вкладывать деньги в образование. Примем значение рыночной ставки $g = 15\%$. Затраты на обучение $C = 48000 + 20000 = 68000$.

После обучения зарплата увеличится на B денежных единиц в год (предполагаем, что это постоянная величина на протяжении всей оставшейся жизни). Определим величину B . Используя формулу для современной величины годовой ренты, получим уравнение

$$C = \frac{B}{0,15} \left[1 - \frac{1}{(1+0,15)^N} \right],$$

из которого легко определить значение B . Пусть $N = 40$, тогда $B = 10200$. Это означает, что обучение будет выгодным с финансовой точки зрения, если будущие доходы индивидуума возрастут не меньше чем на 10200. Пусть в данном примере $N = 5$. Тогда расчеты дадут следующий результат: $B = 20300$.

Глава 5. КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ ФИНАНСОВЫЙ АНАЛИЗ ЦЕННЫХ БУМАГ С ФИКСИРОВАННЫМ ДОХОДОМ

В данном разделе рассматриваются методы количественного финансового анализа финансовых обязательств с фиксированным доходом. К такому виду финансовых обязательств относятся *ценные бумаги, приносящие фиксированный доход в виде процентов*, — облигации, различные сертификаты, привилегированные акции и другие ценные бумаги, по которым выплачивается заранее обусловленный доход. Вложения в ценные бумаги относятся к *финансовым инвестициям*. Основным видом ценных бумаг с фиксированным доходом являются облигации.

Под **облигацией** понимается ценная бумага, свидетельствующая о том, что ее держатель предоставил заем эмитенту этой бумаги. Облигация, как правило, обеспечивает ее владельцу регулярное получение фиксированного дохода в виде процентов от номинала и в конце срока — некоторой выкупной цены, обычно равной номиналу.

Основные параметры облигации:

1. Номинальная цена или выкупная цена, если она отличается от номинала.
2. Дата погашения.
3. Норма доходности или купонная ставка. Это процентная ставка, по которой регулярно выплачивается доход владельцу облигации.
4. Сроки выплаты процентов.

Определенное значение имеет наличие или отсутствие оговорки о запрете досрочного выкупа облигаций. Наличие у эмитента права досрочного выкупа снижает качество облигации, поскольку повышается степень неопределенности для инвестора.

В зависимости от метода выплаты доходов и способов погашения займов облигации можно классифицировать следующим образом.

1. Облигации, по которым производится только выплата процентов, а капитал не возвращается. Эмитент указывает лишь на возможность их выкупа, не связывая себя конкретным сроком.
2. Облигации, по которым не выплачиваются проценты. Это так называемые облигации с нулевым купоном.

3. Облигации, по которым держателям проценты начисляются и выплачиваются вместе с номиналом в момент погашения.

4. Облигации, дающие право их владельцам на получение периодически выплачиваемого дохода в виде процентов и выкупной суммы в будущем при погашении. Этот вид облигаций наиболее распространен.

Облигации — важный объект финансовых инвестиций и с момента их эмиссии и до погашения они продаются и покупаются по сложившимся на рынке ценам.

Рыночная цена в момент эмиссии может быть ниже, выше либо равна номиналу. Поскольку номиналы различных облигаций могут существенно различаться, то необходим сопоставимый измеритель рыночной цены облигации. Таким измерителем является курс облигаций. Под курсом понимают покупную цену одной облигации в расчете на 100 денежных единиц номинала.

Пусть P — рыночная цена, N — номинал, K — курс. Тогда, по определению

$$K = \frac{P}{N} 100.$$

Основные задачи анализа облигаций:

- 1) определение полной доходности облигации;
- 2) определение внутренней стоимости облигации и выявление неверно оцененных рынком ценных бумаг;
- 3) оценка риска, связанного с вложениями в облигации.

В данной теме рассматриваются методы решения перечисленных задач.

5.1 Определение полной доходности облигаций

Общий доход от облигаций складывается из трёх элементов:

- 1) периодически выплачиваемого купонного дохода;
- 2) изменения рыночной цены облигации за определённый период времени. Если облигация была куплена по цене ниже номинала, или, как говорят, с *дисконтом*, то этот элемент доходности — положительная величина. Если облигация была куплена по цене выше номинала, или, как говорят, с премией, то этот эле-

мент доходности будет отрицательной величиной. Если покупная цена равна номиналу, то этот элемент доходности отсутствует;

3) дохода от реинвестиции поступления от купонов.

Существует несколько способов и показателей измерения доходности облигаций. Например, доходность облигации с периодической выплатой процентов можно измерить в виде купонной доходности, но в этом случае не учитывается второй элемент доходности. В данном разделе рассматриваются методы определения полной доходности, учитывающие первые два элемента доходности (очевидно, использование купонного дохода зависит от индивидуальных склонностей инвестора и в общем случае его учесть невозможно). Показатель полной доходности измеряет реальную финансовую эффективность облигации для инвесторов и обычно определяется в виде годовой ставки сложных процентов. Для этой ставки в финансовой литературе используют различные наименования — **доходность к погашению, обещанная доходность к погашению**, используется также термин **ставка помещения**. Наиболее точно содержательный смысл этого показателя отражает термин «обещанная доходность к погашению». На рынке ценных бумаг эта ставка непосредственно не фигурирует. Это расчетная величина, которую можно определить только исходя из рыночной цены облигации.

Методика расчета полной доходности облигации основана на определении современной стоимости потока платежей, получаемых владельцем облигации. При этом дисконтирование платежей осуществляется по искомой ставке доходности к погашению.

Доходность облигации без выплаты процентов

Такая облигация имеет один источник дохода для инвестора — разность между выкупной ценой облигации (номинал) и ценой приобретения (рыночной ценой).

Пусть P — рыночная цена облигации (цена покупки), N — номинал, n — срок до погашения. В конце срока владелец такой облигации получит сумму, равную номиналу. Эту величину необходимо дисконтировать и приравнять ее современную стоимость к рыночной цене облигации. В результате получим уравнение

$$N\nu^n = P,$$

где $\nu = \frac{1}{1+i}$, i — искомая ставка доходности.

Это уравнение можно переписать, используя понятие курса. Получим

$$\nu^n = \frac{K}{100},$$

откуда нетрудно определить искомую ставку:

$$i = \frac{1}{(K/100)^{1/n}} - 1.$$

Если курс $K < 100$, или, что то же самое, рыночная цена $P < N$, то ставка i — положительная величина и данная облигация принесет доход.

Определение доходности облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов

Доход от этого вида облигаций получают только в виде периодически выплачиваемых процентов от номинала. Пусть проценты выплачиваются один раз в конце года, g — купонная ставка, тогда gN — ежегодно получаемый доход. Выплату потока процентных платежей можно рассматривать как вечную ренту. Необходимо приравнять современную величину этой ренты к покупной цене облигации.

Получим формулу для современной величины вечной ренты. Обозначим A_∞ — современную величину такой ренты. Имеем

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}.$$

Используем эту формулу для определения полной доходности облигации. Очевидно, современная величина платежей по облигации равна $\frac{gN}{i}$. Приравняем эту величину покупной цене.

Получим уравнение

$$\frac{gN}{i} = P = \frac{K}{100} N,$$

решая которое, определим

$$i = \frac{g}{K} 100.$$

Если курс $K < 100$, то доходность к погашению $i > g$; если $K = 100$, то $i = g$; если $K > 100$, то $i < g$.

Если процентные платежи выплачиваются p раз в год, то поток этих платежей можно рассматривать как вечную p -срочную ренту. Приравнивая современную величину этой ренты к цене приобретения, получим уравнение, решив которое, определим ставку полной доходности i :

$$i = \left(\frac{g}{p} \frac{100}{K} + 1 \right)^p - 1.$$

Доходность облигации с выплатой процентов в конце срока

Для такого вида облигаций проценты начисляются и выплачиваются в конце срока в виде одной суммы вместе с номиналом. Эта облигация имеет два источника дохода:

- 1) проценты за весь период займа;
- 2) прирост капитала, т.е. разность номинала и покупной цены.

В конце срока владелец такой облигации получает сумму $N(1+g)^n$.

Дисконтируем эту величину и приравняем результат к цене приобретения. Получим уравнение

$$N(1+g)^n v^n = P = \frac{KN}{100},$$

из которого определим ставку

$$i = \frac{1+g}{(K/100)^{1/n}} - 1.$$

Если курс $K < 100$, то $i > g$; если $K > 100$, то $i < g$.

Определение доходности облигации с периодической выплатой процентов, погашаемой в конце срока

Суммарный доход от облигации данного вида складывается из двух элементов:

- 1) текущего дохода, реализуемого с помощью купонов;

2) дохода, получаемого в конце срока (равного номиналу или выкупной цене, если она не совпадает с номиналом).

Предположим, что купонные платежи выплачиваются один раз в год. Тогда поток этих платежей можно рассматривать как годовую ренту. Дисконтируя все платежи и приравнявая результат к покупной цене, получим уравнение

$$N(1+i)^{-n} + Nga_{n,i} = P$$

или, используя понятие курса,

$$((1+i)^{-n} + ga_{n,i})100 = K.$$

Это уравнение необходимо решить относительно ставки i . Оно имеет единственное положительное решение, которое можно определить только численно.

Если купонные платежи выплачиваются p раз в год, то уравнение примет вид

$$((1+i)^{-n} + ga_{n,i}^{(p)})100 = K.$$

И в этом случае искомая ставка определяется численно.

Доходность облигации с учетом налогов

Рассмотрим облигацию с периодической выплатой процентов и погашением в конце срока. Введём две налоговые ставки: m — ставка налога на прирост капитала, h — ставка налога на текущий доход. Сумма налога на прирост капитала равна $m(N - P)$. С учетом этого налога владелец получит в конце срока не номинал, а сумму $(N - m(N - P))$. Сумма налога на текущий доход равна hNg . С учетом этого налога владелец периодически будет получать сумму, равную $(1 - h)Ng$.

Дисконтируем поток платежей с учетом налогов и приравняем результат к покупной цене облигации. Получим уравнение

$$(N - m(N - P))v^n + (1 - h)Nga_{n,i} = P.$$

Если использовать понятие курса, то данное уравнение можно преобразовать к виду:

$$\frac{100}{1 - mv^n}((1 - m)v^n + (1 - h)ga_{n,i}) = K.$$

В данном случае ставку доходности к погашению можно определить тоже только численно. Если платежи поступают p

раз в год, то в этом уравнении коэффициент приведения $a_{n,i}$ заменяется на коэффициент приведения p -срочной ренты $a_{n,i}^{(p)}$.

5.2 Доходность портфеля облигаций

Разумный инвестор вкладывает средства не в один вид ценных бумаг, а формирует портфель облигаций, который включает различные по видам и срокам облигации. В данном разделе рассматривается простейший анализ портфеля. Он заключается в оценке полной доходности портфеля. Доходность портфеля измеряется в виде годовой ставки сложных процентов. Эта ставка определяется из решения уравнения, в котором общая стоимость облигаций, входящих в портфель, приравнивается к сумме современных величин всех видов платежей по облигациям. Пусть S_t — элемент потока платежей в момент времени t , Q_j — количество облигаций вида j , входящих в портфель, P_j — цена приобретения одной облигации вида j . Уравнение для определения доходности имеет вид

$$\sum_t S_t v^t - \sum_j Q_j P_j = 0.$$

Здесь $\sum_j Q_j P_j$ — рыночная стоимость портфеля, $\sum_t S_t v^t$ — сумма современных величин всех платежей по всем облигациям, которые входят в портфель.

Ставка определяется численным методом.

5.3 Оценивание облигаций. Базовая модель оценивания облигаций

Метод капитализации дохода

Как было отмечено выше, одной из основных целей финансового анализа ценных бумаг является выявление бумаг, неверно оцененных рынком.

Предположим, что в некоторых случаях на основе общедоступной информации можно выявить облигации, неверно оцененные рынком. Для этого необходимо иметь некоторую аналитиче-

скую процедуру, основываясь на которой, инвестор мог бы выявить такие облигации и с учетом этого принимать обоснованные решения относительно продажи или покупки этих облигаций.

Возможны два подхода к решению данной задачи:

1. Ставка доходности к погашению облигаций, которые анализирует инвестор, сравнивается со значением ставки, которое является «справедливым», по мнению инвестора. Свое мнение инвестор формирует на основе анализа как характеристик облигации, так и текущей рыночной ситуации. Если доходность облигации выше справедливой, то говорят, что облигация недооценена и в этом случае она — кандидат на покупку. Если доходность к погашению меньше справедливой, то облигацию называют переоцененной и тогда она — кандидат на продажу.

2. Инвестор оценивает истинную или внутреннюю стоимость облигации и сравнивает её с рыночной ценой. Если текущая рыночная цена меньше внутренней стоимости, то облигация недооценена рынком, и наоборот, если текущая рыночная стоимость больше внутренней стоимости, то облигация переоценена.

Обе процедуры анализа и оценки облигации основаны на методе капитализации дохода, т.е. на приведении всех платежей по облигации к настоящему моменту времени. Рассмотрим первый подход.

Доходность к погашению

Методы определения доходности к погашению (точнее — обещанной доходности к погашению) для различного вида облигаций были рассмотрены в предыдущем разделе. Рассмотрим общую модель для определения этого показателя. Пусть P — текущая рыночная цена облигации с остаточным сроком обращения n лет и предполагаемыми денежными выплатами инвестору $C_1, C_2, \dots, C_n$. Тогда обещанная доходность к погашению — это процентная ставка, определяемая из уравнения

$$P = \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

или

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+i)^t}.$$

Сравниваем полученную ставку i с некоторой справедливой, по мнению инвестора, ставкой i^* .

Если $i > i^*$, то данная облигация недооценена.

Если $i < i^*$, то облигация переоценена на рынке.

Если $i = i^*$, то облигация оценена рынком справедливо

Внутренняя стоимость (базовая модель оценивания облигаций)

Метод, основанный на определении внутренней стоимости, предполагает, что внутренняя стоимость любого актива, в том числе облигации, определяется дисконтированными величинами платежей, которые инвестор ожидает получить в будущем за счет владения этим активом.

Определим внутреннюю стоимость облигации следующим образом:

$$V = \frac{C_1}{1+i^*} + \frac{C_2}{(1+i^*)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+i^*)^n}$$

или

$$V = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+i^*)^t}.$$

Данную модель называют *базовой моделью оценивания облигации* (The Basic Bond Valuation Model).

Чистая приведенная стоимость (NPV) облигации:

$$NVP = V - P = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+i^*)^t} - P.$$

Если $NVP > 0$, то облигация недооценена рынком; если $NVP < 0$, то переоценена. Любая облигация, у которой $i > i^*$, будет иметь $NVP > 0$ и наоборот.

Для оценивания облигации путем капитализации дохода должны быть рассчитаны значения C_t, P, i^* . Величины платежей C_t известны, значение рыночной цены P тоже известно. Ставка i^* зависит от субъективной оценки инвестором как характеристик облигации, так и текущих условий на рынке. Таким образом, основной составляющей анализа облигаций является определение справедливого, по мнению данного инвестора, значения ставки i^* .

Влияние параметров облигации на её внутреннюю стоимость

Параметры, которые определяют стоимость облигации, — это срок, купонные платежи (купонная ставка) и рыночная ставка. Из формул, определяющих внутреннюю стоимость, следует, что повышение ставки приводит к уменьшению внутренней стоимости облигации. Таким образом, внутренняя стоимость — это изменяющаяся величина, зависящая от колебаний уровня рыночного процента. С увеличением срока облигации влияние на внутреннюю стоимость современной величины выкупной цены понижается, а влияние современной величины купонных платежей растет. Изменение рыночной ставки в большей мере влияет на оценку при увеличении срока.

Рекомендации для инвесторов. Если на рынке установилась высокая ставка и ожидается дальнейший её рост, то инвесторы стремятся заменить долгосрочные облигации краткосрочными. Если ожидается падение рыночной ставки, то краткосрочные облигации заменяются долгосрочными.

Чем ниже купонный доход, тем ниже внутренняя оценка облигации. При этом повышается чувствительность оценки к изменению рыночной ставки. Относительное изменение оценки в результате изменения ставки будет тем меньше, чем выше купонная ставка.

Рекомендации для инвестора. При ожидаемом падении уровня рыночной ставки инвесторы стремятся приобрести облигации с меньшей купонной доходностью. В этом случае, если происходит снижение уровня рыночной ставки, купленные облигации дают больший относительный прирост их оценки.

5.4 Формулы для оценивания облигаций

Для оценки внутренней стоимости облигаций различного вида удобно пользоваться формулами, полученными с учетом особенностей поступления платежей по данному виду облигаций.

Облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов

Выплаты по такой облигации можно рассматривать как вечную ренту. Определение внутренней стоимости сводится к опре-

делению современной величины такой ренты. Соответствующая формула имеет вид

$$V = \frac{gN}{i^*}.$$

Если доход по облигации выплачивается p раз в год, то

$$V = \frac{gN}{p[1+i^*]^{1/p} - 1}.$$

Облигации без периодической выплаты процентов

По такой облигации проценты выплачиваются в момент погашения займа. Владелец получает сумму $V = N(1+g)^n$. Формула для расчета внутренней стоимости:

$$V = N \left(\frac{1+g}{1+i^*} \right)^n.$$

Облигации с нулевым купоном

Владельцу выплачивается только номинал или выкупная цена, проценты не выплачиваются. Расчетная формула:

$$V = N \left(\frac{1}{1+i^*} \right)^n.$$

Облигации с погашением в один срок и периодической выплатой дохода

Пусть проценты выплачиваются регулярно один раз в год, в конце года, и погашение производится по номиналу. Дисконтируя платежи, получим

$$V = Nv^n + gNa_{n,i^*},$$

где $v = \frac{1}{1+i^*}$.

Если доход выплачивается p раз в год, а g — годовая купонная ставка, то

$$V = Nv^n + gNa_{n,i^*}^{(p)}.$$

5.5 Оценка риска, связанного с вложениями в облигации

Выше были рассмотрены методы анализа облигаций, связанные с определением полной доходности и внутренней стоимости данных ценных бумаг. Однако только этих характеристик недостаточно для обоснованного принятия решения о вложениях в тот или иной вид облигаций. Это связано с тем, что инвестиции в любые ценные бумаги сопряжены с определенным риском. Выделяют два основных вида рисков:

- 1) кредитный;
- 2) рыночный.

Кредитный риск связан с возможностью отказа эмитентом от своих обязательств, что может повлечь либо полное прекращение выплаты текущих платежей и выкупной цены, либо нарушение оговоренных сроков выплат.

Рыночный риск связан с колебаниями рыночной процентной ставки, которые в значительной мере влияют на изменение внутренней стоимости облигации и, соответственно, рыночной цены облигации.

Рыночный и кредитный риски связаны со сроком облигации — чем больше срок, тем выше риск. Однако просто срок облигации, т.е. период времени от ее приобретения до погашения, не учитывает особенность распределения доходов во времени у разных видов облигаций — так называемый профиль доходов. Очевидно, при прочих равных условиях, риск вложений в облигации, по которым периодически выплачиваются проценты, меньше, чем риск вложений в облигации без выплаты процентов.

Рассмотрим показатели, которые позволяют измерять риск с учетом профиля доходов.

Средний срок

Этот показатель учитывает сроки выплат всех видов облигаций в виде взвешенной среднеарифметической величины. В качестве весов берутся размеры платежей. Таким образом, чем больше сумма платежа, тем большее влияние на средний срок оказывает срок выплаты этого платежа.

Рассмотрим облигацию, у которой купонные платежи поступают один раз в год, в конце года. Пусть C_t — ожидаемый платеж по облигации, t — срок платежа, $t=1, \dots, n$. В поток платежей включаем и платеж по номиналу. При этих условиях средний срок определяется по формуле

$$T = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot C_t}{\sum_{t=1}^n C_t}.$$

Средний срок $T < n$, если купонная ставка $g > 0$.

Для облигации без выплаты купонных платежей (напомним, что по такой облигации владелец получает только номинал в конце срока) $g = 0$ и $T = n$. Чем больше текущий доход от облигации относительно номинала, тем меньше средний срок T и, следовательно, меньше риск, связанный с инвестицией в данный вид облигации.

Для облигации с ежегодной выплатой процентов и погашением номинала в конце срока данная формула примет вид:

$$T = \frac{Ng \sum_{t=1}^n t + nN}{nNg + N},$$

поскольку в данном случае $C_t = gN$ при $t = 1, 2, \dots, n-1$; $C_n = gN + N$.

Заметим, что $\sum_{t=1}^n t = \frac{n(n+1)}{2}$ — сумма членов арифметической прогрессии.

Учитывая это, формулу для среднего срока можно привести к виду

$$T = n \frac{g(n+1)/2 + 1}{gn + 1}.$$

Аналогично можно получить формулу для случая, когда купонные платежи поступают несколько раз в год.

Средняя продолжительность платежей — дюрация

В отличие от среднего срока облигации при расчете показателя «дюрация» в качестве весов принимаются не суммы платежей, а их дисконтированные величины. Следовательно, при определении дюрации учитывается фактор времени. В общем виде дюрация определяется по формуле

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n t C_t v^t}{\sum_{t=1}^n C_t v^t},$$

где v — множитель дисконтирования по ставке доходности к погашению.

Поскольку в качестве ставки дисконтирования берется ставка доходности к погашению, то

$$P = \sum_{t=1}^n C_t v^t,$$

где P — текущая рыночная цена облигации.

С учетом этого соотношения будем иметь

$$D = \sum_{t=1}^n \left(\frac{C_t v^t}{P} t \right).$$

Таким образом, современная стоимость каждого платежа выражается как доля рыночной цены P и эти доли умножаются на время t . Облигация без выплаты процентов имеет дюрацию $D = n$. Действительно, поскольку эта облигация имеет только один платеж $C_n = N$, то $C_n v^n = P$. Учитывая это, получим

$$D = \frac{C_n v^n}{P} n = n.$$

Для всякой купонной облигации $D < n (g > 0)$.

Рассмотрим облигацию с периодической выплатой процентов один раз в конце года и погашаемую в конце срока. Для такой облигации дюрация определяется по формуле

$$D = \frac{Ng \sum_{t=1}^n t v^t + n N v^n}{P}.$$

Рассмотренный показатель «дюрация» обладает следующим замечательным свойством. Как было отмечено в предыдущем разделе, стоимости облигаций с одинаковыми сроками погашения, но с различными купонными платежами по-разному меняются при одном и том же изменении процентной ставки. Однако облигации, имеющие одинаковую дюрацию, реагируют на изменение ставки сходным образом. В связи с этим инвесторы при формировании портфеля облигаций стремятся включать в портфель облигации с одинаковой дюрацией. Этот метод называется иммунизацией портфеля и позволяет ограничить влияние будущих колебаний рыночной процентной ставки на ожидаемые доходы.

Глава 6. ФИНАНСОВЫЙ АНАЛИЗ РИСКОВАННЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ (ОБЫКНОВЕННЫЕ АКЦИИ)

6.1 Общая модель оценки

В отличие от ценных бумаг с фиксированным доходом по акциям выплачиваются дивиденды, размеры которых точно не известны и их можно лишь с какой-то степенью достоверности прогнозировать на основе некоторых предположений. Для оценки акций, так же как и облигаций, можно использовать метод капитализации доходов. Этот метод позволяет выявить неверно оцененные рынком акции. Метод предполагает, что внутренняя стоимость акции определяется финансовым потоком, который инвестор ожидает получить в будущем в результате владения этой акцией. Поскольку этот поток ожидается в будущем, то определяется его современная величина с использованием ставки дисконтирования, которая выбирается так, чтобы учесть не только фактор времени, но и риск.

Будем предполагать, что акция находится у инвестора неограниченное время и все финансовые поступления, связанные с инвестицией в эту акцию, состоят из дивидендных платежей. Тогда внутренняя стоимость акции V определяется уравнением

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t},$$

где k — ставка дисконтирования для финансового потока (дивидендов) данной степени риска, D_t — сумма дивидендов в момент времени t .

Пусть P — рыночная цена акции. Если $V - P > 0$, то это означает, что данная акция недооценена рынком, при $V - P < 0$ акция переоценена рынком.

Так как время обращения обыкновенных акций не ограничено, то необходимо предсказать бесконечный поток платежей. Принимая некоторые предположения относительно потока дивидендов, эту задачу можно решить. Пусть дивиденды выплачиваются один раз в год и закон изменения дивидендов выглядит следующим образом:

$$D_t = D_{t-1}(1 + g_t),$$

где g_t — темп роста дивидендов,

$$g_t = \frac{D_t - D_{t-1}}{D_{t-1}}.$$

Конкретные модели оценивания строятся на предположениях, связанных с темпом роста дивидендов.

6.2 Модель нулевого роста

В данной модели предполагается, что все дивиденды постоянны: $D_0 = D_1 = \dots = D_n = \dots$ (темп роста дивидендов $g_t = 0$). Тогда

$$V = D_0 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^t}.$$

Такой поток платежей можно рассматривать как вечную ренту. Для этой ренты

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^t} = \frac{1}{k}.$$

Следовательно

$$V = \frac{D_0}{k}.$$

Иногда вместо D_0 в данной формуле записывают D_1 .

Используя данную модель, можно найти внутреннюю норму (ставку) доходности, ее смысл и метод определения аналогичны ставке доходности к погашению для облигации. Из уравнения

$$P = \frac{D_0}{k}$$

получаем

$$k^* = \frac{D_0}{P}.$$

На практике эта модель может использоваться для оценивания привилегированных акций высокого качества. По таким акциям выплачиваются дивиденды фиксированного размера независимо от прибыли.

6.3 Модель постоянного роста

Предположим, что темп роста $g > 0$ и не зависит от времени. Следовательно, дивиденды изменяются по закону

$$D_t = D_{t-1}(1 + g)$$

или

$$D_t = D_0(1 + g)^t.$$

Модель оценки имеет вид

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_0(1+g)^t}{(1+k)^t} = D_0 \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+k} \right)^t.$$

Рассмотрим сумму $S = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+k} \right)^t$. Очевидно, это сумма членов геометрической прогрессии с первым членом и знаменателем, равными $\frac{1+g}{1+k}$. Используя формулу (2.1) для суммы n членов геометрической прогрессии, получим

$$S = \left(\frac{1+g}{1+k} \right) \frac{\left(\frac{1+g}{1+k} \right)^n - 1}{\left(\frac{1+g}{1+k} \right) - 1}.$$

Здесь предполагается, что $\frac{1+g}{1+k}$, т.е. $g < k$.

Очевидно,

$$V = D_0 \lim_{n \rightarrow \infty} S = D_0 \frac{1+g}{k-g}$$

при $k > g$. Таким образом, окончательно можно записать

$$V = D_0 \frac{1+g}{k-g}.$$

Иногда данную модель записывают в виде

$$V = \frac{D_1}{k-g}.$$

Получим формулу для расчета внутренней нормы доходности. Из уравнения

$$P = D_0 \frac{1+g}{k^* - g}$$

найдем

$$k^* = \frac{D_0(1+g)}{P} + g = \frac{D_1}{P} + g.$$

6.4 Модели переменного роста

При построении моделей переменного роста инвестор предполагает, что после некоторого момента времени T дивиденды будут расти с постоянным темпом роста g . До момента T инвестор прогнозирует поток дивидендов, не предполагая, что они изменяются по какому-либо закону.

Современная стоимость дивидендов, полученных в интервале времени от 0 до T :

$$V_{T-} = \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{(1+k)^t}.$$

Дивиденды, которые получит инвестор после момента времени T , изменяются с постоянным ростом. Для оценки стоимости этого потока дивидендов на момент времени T можно использовать модель постоянного роста. В соответствии с этой моделью приведенная стоимость дивидендов на момент T :

$$V_T = D_{T+1} \left(\frac{1}{k-g} \right).$$

Приведенная стоимость данного потока дивидендов на начальный момент:

$$V_{T+} = V_T \frac{1}{(1+k)^T} = \frac{D_{T+1}}{(k-g)(1+k)^T}.$$

Общая оценка акции:

$$V = V_{T-} + V_{T+} = \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{(1+k)^t} + \frac{D_{T+1}}{(k-g)(1+k)^T}.$$

Внутреннюю норму доходности можно определить, численно решив уравнение:

$$P = \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{(1+k^*)^t} + \frac{D_{T+1}}{(k^* - g)(1+k^*)^T}.$$

Нетрудно заметить, что модель постоянного роста является частным случаем модели переменного роста — при $T = 0$ получаем модель постоянного роста.

Двухэтапные модели

При построении двухэтапных моделей предполагают, что до некоторого момента времени T темп роста дивидендов равен g_1 , а затем дивиденды меняются с темпом g_2 .

Трехэтапные модели

В трехэтапных моделях предполагается, что до некоторого момента T_1 темп роста дивидендов g_1 , в промежутке от T_1 до T_2 темп g_2 , после момента T_2 темп роста g_3 .

Эти модели исходят из анализа этапов развития фирмы.

6.5 Оценка с учетом конечного срока владения акцией

Предположим, что инвестор собирается продать акцию через год, тогда внутренняя стоимость:

$$V = \frac{D_1}{1+k} + \frac{P_1}{1+k},$$

где P_1 — ожидаемая цена через год, D_1 — дивиденды, выплаченные инвестору за год. Чтобы можно было использовать это равенство, необходимо оценить величину P_1 . Предположим, что оценка величины P_1 основывается на будущих дивидендах. Тогда

$$P_1 = \sum_{t=2}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^{t-1}}.$$

Используя эту формулу, запишем:

$$V = \frac{D_1}{1+k} + \left[\frac{D_2}{1+k} + \frac{D_3}{(1+k)^2} + \dots \right] \left(\frac{1}{1+k} \right) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t}.$$

Таким образом, результат оценки не зависит от срока владения акцией при условии, что цена продажи оценивается на основе будущего потока дивидендов.

Глава 7. ВЛИЯНИЕ ФАКТОРА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА ЭКОНОМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

Рассмотрим три схемы выплаты дивидендов:

- в середине каждого квартала выплачиваются дивиденды в размере 100 д.е.;
- в середине каждого квартала выплачиваются дивиденды случайного размера, в среднем 100 д.е.;
- в каждом квартале выплачиваются в некоторый случайный день дивиденды в размере 100 д.е.

Какая из этих трех схем предпочтительнее для владельца акций? Анализу аналогичных вопросов посвящена данная глава.

7.1 Плавающая ставка процента

Аналогично предыдущему примеру рассмотрим три варианта начисления процентов за пользование деньгами в единичном промежутке:

- в конце промежутка по ставке i начисляются проценты;
- в конце промежутка начисляются проценты по случайной ставке, в среднем ставка равна i процентов;
- проценты начисляются дважды: половина — незадолго до конца промежутка и вторая половина — на таком же временном расстоянии после окончания промежутка.

Первый вариант начисления процентов — это вариант детерминированного финансового анализа, т.е. анализа в условиях определенности. Поэтому проанализируем второй и третий варианты. Достаточно ограничиться рассмотрением единичной денежной суммы.

Второй вариант. Пусть $f(x)$ — плотность распределения случайной ставки X , тогда начисляемые процентные деньги есть случайная величина $I(X) = X$ плотностью $f(x)$ и математическим ожиданием $M[I] = M[X] = i$. Другими словами, детерминированный эквивалент случайной ставки есть i .

При рассмотрении третьего варианта пусть первая порция процентных денег по ставке $i/2$ начисляется в момент $1-\varepsilon$, а вторая, так же по ставке $i/2$, в момент $1+\varepsilon$, где ε — небольшое по-

ложительное число. Тогда в первый раз начисленные процентные деньги $I_1 = i/2$, во второй раз так же $I_2 = i/2$. Приведем эти суммы к моменту 1, для чего I_1 умножим на $(1+i/2)^\varepsilon$, а I_2 умножим на $(1+i/2)^{-\varepsilon}$. Получаем эквивалент суммарных процентных денег в момент 1: $(i/2) \cdot [(1+i/2)^\varepsilon + (1+i/2)^{-\varepsilon}]$. Так как $[(1+i/2)^\varepsilon + (1+i/2)^{-\varepsilon}] > 2$, то получившиеся процентные деньги больше, чем i , т.е. детерминированный вариант таким образом начисляемой процентной ставки больше, чем i .

Как можно представить второй и третий варианты? Пусть банк имеет много филиалов, относительно самостоятельных в части выплаты процентов (в какой-то мере таковым является Сбербанк). Второй вариант получается, когда все они начисляют проценты в конце промежутка, но сами проценты случайные, хотя в среднем по всему банку процентная ставка равна i (усреднение по географическому признаку). Такой вариант назовем случайными процентами. Третий вариант получается, когда в каждом филиале начисляются одни и те же проценты, но день начисления случаен. Такая случайность есть начисление процентов (неслучайных) в случайный момент времени (здесь усреднение по времени начисления процентов).

Итак, детерминированный эквивалент случайных процентов (второй вариант) равен математическому ожиданию случайной величины начисляемых процентов. Детерминированный эквивалент случайного (во времени) начисления процентов (третий вариант) больше, чем математическое ожидание (по моменту времени) начисляемых процентов.

Аналогичные выводы следуют по поводу различных вариантов дисконтирования к современному моменту будущих сумм. Рассмотрим три варианта выплаты займа (в долг взята единичная сумма), взятого на единичный промежуток времени по ставке i процентов:

- в конце промежутка выплачивается сумма $(1+i)$ — детерминированный вариант;
- в конце промежутка выплачивается случайная сумма, в среднем равная $(1+i)$;

- сумма выплачивается дважды: половина — незадолго до конца промежутка и вторая половина — на таком же временном расстоянии после окончания промежутка.

Анализ, подобный приведенному выше, показывает, что во втором варианте средняя величина дисконтированных к современному моменту выплат равна 1, т.е. второй вариант эквивалентен детерминированному варианту; в третьем варианте средняя величина оказывается больше, чем 1. Итак, для кредитора предпочтительнее третий вариант. Это же верно и для случая трех вариантов выплаты дивидендов в начале главы — для владельца акций предпочтительнее третий вариант.

Все это хорошо известно финансистам и может быть выражено словами: *если возможно, свой долг плати позже, долги себе собирай пораньше.*

7.2 Случайные потоки платежей

Такие потоки могут быть весьма разнообразны:

- полностью детерминированный поток — моменты платежей и величины платежей полностью определены;
- частично детерминированный поток — полностью определены моменты платежей либо величины платежей и т.д.

Ограничимся рассмотрением двух примеров.

Пример 1. По договору в течение 5 лет в конце каждого квартала издательство переводит на счет автора случайную сумму денег (зависит от числа проданных книг). Предположим, что эта сумма равномерно распределена от 1000 до 1400 руб. Как найти современную величину этой ренты?

Решение. Так как момент платежей точно определен, то для расчетов можно заменить поток реальных платежей потоком их математических ожиданий и использовать соответствующую формулу из детерминированного анализа. Так как переводимая сумма равномерно распределена, то ее математическое ожидание есть середина промежутка распределения, т.е. 1200 руб. Для простоты пусть квартальная ставка сложных процентов $i = 3\%$, тогда искомая современная величина равна

$$1200 \cdot a(20, 3) = 1200 \cdot 14,877 = 17\,862 \text{ руб.}$$

Пример 2. Предположим, что единичные платежи следуют друг за другом через случайные промежутки времени, распределенные по показательному закону с параметром $\lambda > 0$ (пуассоновский поток платежей). Найдём современную величину такого случайного потока платежей (точнее, математическое ожидание этой величины).

Решение. Дисконтируем к современному моменту первый платеж. Для этого надо подсчитать интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1+i)^{-t} \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-t(\lambda + \ln(1+i))} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \lambda e^{-t(\lambda + \ln(1+i))} dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{\lambda}{\lambda + \ln(1+i)} e^{-t(\lambda + \ln(1+i))} \Big|_0^A \right) = \frac{\lambda}{\lambda + \ln(1+i)}. \end{aligned}$$

Вспомним, что параметр λ в показательном законе есть обратная величина к математическому ожиданию, и получаем, что $\lambda = 1/T$, где T — среднее время между платежами, и окончательно, что математическое ожидание современной величины первого платежа равно $1/[1 + T \ln(1+i)]$.

Поскольку промежуток времени между платежами распределен одинаково, то математическое ожидание современной величины второго платежа равно $1/[1 + T \ln(1+i)]^2$, третьего — $1/[1 + T \ln(1+i)]^3$ и т.д. Сумма всех этих величин и даст искомую величину. Поскольку $1/[1 + T \ln(1+i)] < 1$, то члены суммы есть члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии и, значит, вся сумма равна $1/T \ln(1+i)$.

В частности, при $T=1$ получаем $1/\ln(1+i)$. Заметим, что если бы поток был неслучайным и платежи следовали бы друг за другом через единичный промежуток времени (тогда частота платежей была бы той же самой), то современная величина такого потока была бы $1/i$. Так как $\ln(1+i) < i$, то современная величина случайной ренты больше, чем регулярной.

Потоки платежей со случайным временем платежа часто встречаются на практике. Например, таков поток платежей оплаты за квартиру — ведь редко кто платит за квартиру в строго определенный день. Если бы в примере 1 издательство переводило

автору деньги за каждую проданную тысячу экземпляров книги, то получился бы поток неслучайных платежей в случайные моменты времени.

Еще одним важным примером случайного потока (неслучайных) платежей является поток выплат страховых сумм на случай смерти родственникам умершего. Анализом подобных потоков платежей занимается так называемая актуарная математика.

7.3 Рисковые инвестиционные процессы

Ранее указывалось, что для оценки характеристик инвестиционных проектов важнейшее значение имеет ставка дисконтирования будущих доходов к современному моменту. Если будущие платежи рискованны, т.е. не являются жестко определенными, то инвесторы уменьшают сегодняшнюю оценку будущих доходов. Тем самым для оценки сегодняшнего значения будущих доходов приходится применять увеличенную ставку дисконтирования. Самое простое — расклассифицировать проекты на низкорисковые, среднерисковые и высокорисковые и приписать каждой группе некоторый добавок к обычному коэффициенту дисконтирования. Например, для низкорисковых к ставке прибавляется 2 %, к среднерисковым — 4 %, к высокорисковым — 6 %. Совершенно ясно, что «добавок» зависит от величины обычного коэффициента дисконтирования. Но сам этот коэффициент зависит от темпов инфляции, от доверия к правительству и других факторов. В некоторых моделях финансового рынка этот вопрос решается по своему.

Во всяком случае, отсюда следует вывод: чтобы увеличить привлекательность выдвигаемых проектов, фирма должна заботиться об уменьшении этого рискованного «добавка». Для этого она должна привлекать к себе доверие потенциальных инвесторов. Привлечение доверия включает своевременную выплату дивидендов, соблюдение прав акционеров и др. Особенно это важно для фирмы, намеревающейся долго работать. Такой фирме просто необходимо быть честной, ей это выгодно.

7.4 Подсчет доходности вероятностных операций в условиях неопределенности

В детерминированном анализе доходность d финансовой операции определяется из уравнения $K = H(1 + d)$ или $d = (K - H)/H$, где H , K — денежные оценки соответственно начала операции (затраты, инвестиции) и конца операции (доход, наращенный капитал). Вообще говоря, эти величины также могут быть неопределенны. Однако начальная оценка чаще все же точно известна. Неопределенность конечной оценки может быть двоякой: неполностью известна ее величина, но момент окончания операции известен точно; или же известна полностью ее величина, но окончиться операция может в случайный момент. Подсчет доходности операции в процентах годовых в этих двух случаях производится по-разному. В первом случае вместо конечной оценки используется ее математическое ожидание. Для иллюстрации подсчета доходности во втором случае рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Начальный капитал «челнока» равен \$1000. Опытные люди сказали ему, что в результате поездки за товаром и его последующей реализации капитал может с равной вероятностью возрасти в два раза, не измениться или уменьшиться в два раза (с вычетом сопутствующих издержек). Найти среднюю ожидаемую доходность планируемой операции.

Решение. Математическое ожидание конечной оценки капитала равно, очевидно, $(2000 + 1000 + 500)/3 = 3500/3$, так что средняя ожидаемая доходность будет $(3500/3 - 1000)/1000 = 500/3000 = 17\%$.

Пример 4. Запас золота в месторождении известен, как и начальные инвестиции в его разработку. Фактически полная отдача месторождения тоже фиксирована, следовательно, доходность (в процентах годовых) будет зависеть от длительности выработки месторождения: чем дольше будет вырабатываться месторождение, тем меньше доходность.

В случае, когда начальная оценка операции не может быть точно определена, доходность операций может быть рассчитана

как математическое ожидание доходностей вариантов операции с учетом их вероятностей.

Пример 5. Базовый вариант операции, вероятность которого оценивается в 0,9, предусматривает затраты \$10 000, а прибыль — \$7000, следовательно, его доходность равна 0,3; с вероятностью 0,1 возможен и другой вариант, при котором затраты равны \$20 000, а прибыль равна \$10 000. Какова средняя ожидаемая доходность операции?

Решение. Эта доходность равна $0,9 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,32$.

7.5 Общее понятие детерминированного эквивалента финансового показателя

Пусть f — какой-нибудь финансовый показатель (ставка процента, доходность, срок окупаемости и т.п.), являющийся случайной величиной. Предполагается, что финансовая операция, показателем которой является f , может быть повторена большое число раз (теоретически, хотя бы мысленно, неограниченное число раз). Тогда детерминированный эквивалент финансового показателя f есть такое значение его в детерминированном финансовом анализе, которое дает в среднем тот же результат, что и он сам.

Часто детерминированным эквивалентом является математическое ожидание f .

Замечание. Реально ситуация с плавающими процентными ставками или случайными потоками платежей еще более сложна, чем описано выше. Большинство инвесторов не согласны заменять что-то случайное его математическим ожиданием и требуют большего. Ведь всякая неопределенность связана с риском, и поэтому инвесторы для рискованных операций требуют большей доходности, для дисконтирования к современному моменту будущих доходов по инвестиционному проекту они требуют применять большую ставку (тем самым уменьшая значение будущих доходов) и т.д. Осуществить на практике учет этих требований инвесторов довольно сложно.

Пример 1.

Найти детерминированный вариант процентной ставки, если ее начисление происходит дважды: первая половина в момент 0,9; вторая половина — в момент 1,1.

Решение. Пусть первая порция процентных денег по ставке i начисляется в момент $t_1 = 1 - 0,1$, а вторая, так же по ставке i , в момент $t_2 = 1 + 0,1$. Тогда в первый раз начисленные процентные деньги $I_1 = R \cdot i$, во второй раз $I_2 = R \cdot i$. Здесь R — исходная сумма денег. Приведем эти суммы к моменту 1, для чего I_1 умножим на $(1+i)^{0,1}$, а I_2 умножим на $(1+i)^{-0,1}$. Получаем эквивалент суммарных процентных денег в момент 1: $I_1 \cdot (1+i)^{0,1} + I_2 \cdot (1+i)^{-0,1} = I_1(1+0,1 \cdot i) + I_2(1 - 0,1 \cdot i) = R \cdot 2i$. Таким образом, детерминированный вариант начисляемой процентной ставки равен $2 \cdot i$.

Пример 2. Дайте определение детерминированного эквивалента плавающей процентной ставки в простейшем случае начисления процентов за пользование деньгами на единичном промежутке.

Решение. Например, начисление случайных процентов в один и тот же день в различных филиалах банка. Детерминированным эквивалентом плавающей процентной ставки будет математическое ожидание случайной величины процентов в различных банках.

Пример 3. Найти детерминированный вариант процентной ставки, если с вероятностью $1/3$ ее начисление происходит в момент 0,9, и с вероятностью $2/3$ — в момент 1,1.

Решение. Пусть величина ставки равна i , а сумма платежа равна R , тогда математическое ожидание наращенной суммы в момент 1 равно $(1/3) \cdot$

$$\begin{aligned} & R \cdot i \cdot (1+i)^{0,1} + (2/3) \cdot R \cdot i \cdot (1+i) - 0,1 = \\ & = R \cdot i [(1/3)(1+0,1+\dots) + (2/3)(1-0,1+\dots)] = \\ & = R \cdot i [1-i/30+\dots] \end{aligned}$$

т.е. детерминированный вариант чуть меньше i .

Глава 8. ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

8.1 Проблема выбора инвестиционного портфеля

В данном разделе рассматривается подход к формированию портфеля рискованных ценных бумаг, предложенный в 1952 году американским ученым, Нобелевским лауреатом по экономике Г. Марковицем и являющийся основой современной теории портфеля ценных бумаг.

Рассмотрим финансовую операцию, заключающуюся в покупке рискованных ценных бумаг по известной цене и в продаже их в будущем по цене, заранее не известной. Предполагается, что инвестор в настоящий момент времени инвестирует некоторую сумму денег в ценные бумаги. Эти деньги будут инвестированы на определённый промежуток времени, который называют периодом владения. В конце этого периода инвестор продает ценные бумаги, которые были куплены в начале периода. Таким образом, в момент $t = 0$ инвестор должен принять решение о покупке ценных бумаг, которые будут находиться в его портфеле до момента $t = 1$. Такую задачу называют задачей выбора инвестиционного портфеля.

Эффективность рискованной ценной бумаги зависит от трех факторов: *цены покупки, которая точно известна; промежуточных выплат за период владения (дивидендов), которые точно не известны; цены продажи, которая неизвестна.* Таким образом, финансовая операция, заключающаяся в покупке ценной бумаги с целью получения определенного дохода в будущем, является рискованной. Основная гипотеза, которая позволяет анализировать такую операцию, состоит в следующем: предполагаем, что каждое конкретное значение эффективности такой финансовой операции является реализацией случайной величины

$$R = \frac{C_1 - C_0 + D}{C_0},$$

где C_0 — цена покупки, C_1 — цена продажи, D — дивиденды, выплаченные за период владения.

Формируя портфель ценных бумаг, инвестор хотел бы максимизировать ожидаемую доходность портфеля при минималь-

ном риске. Как правило, эти две цели противоречат друг другу. Принимая решение, инвестор стремится сделать так, чтобы эти две цели были сбалансированы.

Доходность портфеля также является случайной величиной:

$$R_p = \frac{W_1 - W_0}{W_0},$$

где W_0 — совокупная цена покупки ценных бумаг, входящих в портфель в момент $t=0$, W_1 — совокупная рыночная цена ценных бумаг в момент $t=1$ и совокупный денежный доход от этих ценных бумаг (дивиденды), который владелец получит за период владения от момента $t=0$ до $t=1$.

Любая случайная величина может характеризоваться двумя параметрами: ожидаемое или среднее значение (математическое ожидание) и стандартное отклонение (среднеквадратичное отклонение).

Согласно рассматриваемой модели предполагается, что инвестор основывает свое решение по выбору портфеля только на этих двух параметрах. Следовательно, инвестор должен оценить ожидаемую доходность и стандартное отклонение каждого возможного портфеля. Затем он должен выбрать лучший из портфелей, основываясь на соотношении этих двух параметров. При этом ожидаемая доходность рассматривается как мера потенциального вознаграждения, связанная с конкретным портфелем, а стандартное отклонение — как мера риска, связанная с данным портфелем.

Итак, рассмотрим финансовую операцию, которая заключается в покупке ценных бумаг в момент $t=0$ по известной цене и в продаже их в момент $t=1$ по цене, заранее не известной. При этом инвестор может рассчитывать на получение промежуточных выплат. Обозначим $m = M(R)$ — ожидаемое значение эффективности ценной бумаги — математическое ожидание случайной величины R (это среднее по всем реализациям (значениям) случайной величины, вычисленное с учетом частоты их возможного появления), $V = M\{(R - m)^2\}$ — дисперсия или вариация случайной величины — мера отклонения в среднем случайной величины R

от ее ожидаемого значения. Часто вместо дисперсии используют среднеквадратичное или стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{V}$.

Ковариация $V_{12} = M\{(R_1 - m_1)(R_2 - m_2)\}$ характеризует статистическую взаимосвязь двух случайных величин R_1 и R_2 .

Риск вложений в конкретные ценные бумаги связан с неопределённостью будущих доходов и, следовательно, с неопределённостью эффективности данной операции. Чем больше стандартное отклонение, тем больше в среднем случайная величина может отклониться от своего ожидаемого значения, тем больше неопределённость и выше риск. С другой стороны, если $\sigma = 0$, то эффективность не отклоняется от своего ожидаемого значения, она принимает определённые не случайные значения, и риск отсутствует. Таким образом, стандартное отклонение характеризует уровень риска, связанный с конкретной ценной бумагой, и принимается в качестве меры риска.

Рассмотрим действия инвестора, который принимает решение о покупке ценных бумаг. Представим каждый вид ценных бумаг точкой на плоскости с координатами (m_j, σ_j) (см. рис. 8.1).

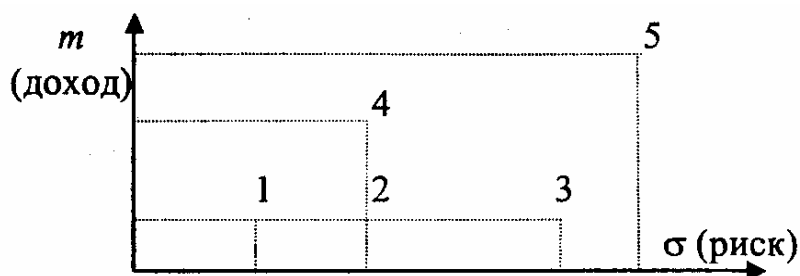


Рис. 8.1

Очевидно, разумный инвестор предпочтет вложение, представленное точкой 1, вложениям 2 и 3; предпочтет вложение 4 вложению 2. Выбор же им вложений, представленных точками 1, 4, 5, зависит от *склонности данного инвестора к риску*.

Предположим, что инвестор вкладывает деньги не в один вид ценных бумаг, а в несколько. В этом случае говорят, что инвестор диверсифицирует свой портфель. Рассмотрим эффект такой диверсификации.

Пусть x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — доля общего вложения, приходящаяся на j -й вид ценных бумаг; n — количество видов ценных

бумаг, которые инвестор включает в портфель. Очевидно, должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1.$$

Пусть R_p — эффективность портфеля, R_j — эффективность j -й ценной бумаги. Тогда

$$R_p = \sum_{j=1}^n R_j x_j.$$

Ожидаемая эффективность портфеля:

$$m_p = M\{R_p\} = \sum_{j=1}^n x_j M\{R_j\} = \sum_{j=1}^n x_j m_j,$$

где $m_j = M\{R_j\}$ — ожидаемая эффективность j -й ценной бумаги. Отклонение от ожидаемой эффективности

$$R_p - m_p = \sum_{j=1}^n x_j (R_j - m_j).$$

Дисперсия эффективности портфеля:

$$V_p = M\{(R_p - m_p)^2\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j M\{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} x_i x_j,$$

где $V_{ij} = M\{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\}$ — ковариация случайных эффективностей R_i и R_j i -го и j -го видов ценных бумаг. Нетрудно заметить, что

$$V_{jj} = M\{(R_j - m_j)^2\} = \sigma_j^2.$$

Предположим сначала, что случайные эффективности различных видов ценных бумаг взаимно некоррелированы. Это означает, что $V_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда вариация портфеля и стандартное отклонение равны:

$$V_p = \sum_{j=1}^n x_j^2 \sigma_j^2, \quad \sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2 \sigma_j^2}.$$

Величина V_p (или σ_p) характеризует неопределенность портфеля в целом и называется **риском портфеля**.

Предположим, что инвестор вложил деньги равными долями во все ценные бумаги. Тогда

$$x_j = \frac{1}{n}, \quad m_p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m_j, \quad \sigma_p = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}.$$

Обозначим $\bar{\sigma} = \max_j \sigma_j$. Тогда имеем

$$\sigma_p \leq \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^n \bar{\sigma}^2} = \frac{1}{n} \sqrt{n \bar{\sigma}^2} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, при росте числа n видов ценных бумаг, включаемых в портфель, риск портфеля ограничен и стремится к нулю ($\sigma_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$). В теории финансового риска этот результат известен как эффект диверсификации портфеля. Следовательно, для уменьшения риска портфеля целесообразно делать вложения не в один вид ценных бумаг, а составлять портфель, содержащий возможно большее разнообразие ценных бумаг, эффективности которых случайны, но случайные отклонения независимы.

Рассмотрим случай, когда существует функциональная зависимость между эффективностями ценных бумаг. Для дальнейшего анализа удобно использовать понятие коэффициента корреляции, который определяется в виде

$$\rho_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}.$$

Очевидно, коэффициент корреляции $\rho_{ij} \in [-1, 1]$. Тогда, учитывая, что

$$V_p = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_i x_j V_{ij} \right), \quad \text{получим } V_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) \rho_{ij}.$$

Предположим, что все $\rho_{ij} = 1$, что означает функциональную зависимость между i -м и j -м видами ценных бумаг. Тогда

$$V_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) = \left(\sum_{i=1}^n (\sigma_i x_i) \right) \left(\sum_{j=1}^n (\sigma_j x_j) \right) = \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j x_j \right)^2.$$

Если капитал вкладывается поровну во все виды ценных бумаг, то получим

$$V_p = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j \right)^2.$$

Стандартное отклонение в этом случае $\sigma_p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j$.

Введем обозначения: $\bar{\sigma} = \max \sigma_i$, $\underline{\sigma} = \min \sigma_i$. Очевидно, что $\underline{\sigma} \leq \sigma_p \leq \bar{\sigma}$.

Таким образом, при полной корреляции диверсификация не эффективна. В этом случае риск портфеля равен среднему риску отдельных вложений и не уменьшается с увеличением количества видов ценных бумаг, включенных в портфель.

Положительная корреляция между эффективностями двух ценных бумаг имеет место, если курс обеих определяется одним и тем же внешним фактором, причем изменения этого фактора действуют в одну и ту же сторону на эффективности ценных бумаг (например, подъем цены на нефть влечет снижение цен акций нефтяных и энергетических компаний).

Рассмотрим случай полной обратной корреляции, когда $\rho_{ij} = -1$. Это означает, что если курс одной ценной бумаги растет, то другой падает в такой же степени. Рассмотрим два вида ценных бумаг. Вариация такого портфеля

$$V_p = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1 x_1 \sigma_2 x_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2.$$

Если распределить капитал в пропорции $x_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_1$, то $V_p = 0$ и данный портфель окажется безрисковым.

Таким образом, при полной обратной корреляции возможно такое распределение вложений между различными видами ценных бумаг, что риск полностью отсутствует. К сожалению, на реальных финансовых рынках не бывает ни полной прямой, ни полной обратной корреляции. Однако можно ожидать, что в любом случае диверсификация портфеля приведет к снижению риска при желаемом уровне ожидаемой эффективности.

8.2 Оптимизация портфеля рискованных ценных бумаг

В данном разделе рассматривается задача оптимального выбора портфеля рискованных ценных бумаг.

Основные предположения, принимаемые при построении модели оптимизации портфеля.

Инвесторы производят оценку инвестиционных портфелей, основываясь на ожидаемых доходностях и их стандартных отклонениях за период владения.

При выборе между двумя портфелями инвесторы предпочитают тот, который при прочих равных условиях даёт наибольшую ожидаемую доходность.

При выборе между двумя портфелями инвестор предпочтёт тот, который при прочих равных условиях имеет наименьшее стандартное отклонение.

Частные активы бесконечно делимы. Это значит, что инвестор при желании может купить часть акции.

Налоги и операционные издержки несущественны.

При этих предположениях можно сформулировать следующую оптимизационную задачу: определить доли вложений x_j ($j = 1, 2, \dots, n$), минимизирующие вариацию (риск) портфеля

$$V_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} x_i x_j,$$

при условии, что обеспечивается заданное значение m_p ожидаемой эффективности портфеля

$$m_p = \sum_{j=1}^n m_j x_j.$$

Кроме того, должны быть выполнены дополнительные ограничения вида

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad x_j \geq 0$$

при всех $j = 1, 2, \dots, n$.

Данная задача с учетом последнего ограничения называется задачей квадратичного программирования. Решение сформули-

рованной задачи не вызывает принципиальных затруднений, и для его поиска можно использовать известные численные процедуры, а также пакеты прикладных программ, реализующие эти процедуры, такие, как Microsoft Excel, Mathcad.

Получим решение задачи без учета ограничений вида $x_j \geq 0$. Если $x_j > 0$, то это означает рекомендацию вложить долю x_j капитала в ценные бумаги вида j . Если $x_j < 0$, то это означает рекомендацию взять в долг ценные бумаги вида j в количестве x_j на единицу наличного капитала. При работе на бирже это означает, что клиент поручает брокеру участвовать в операции типа short sale (продажа без покрытия). В принципе, такая операция допустима и её смысл в следующем. Распоряжение инвестора о short sale на определенное количество ценных бумаг означает, что брокер должен взять займы некоторое количество ценных бумаг, затем через непродолжительное время пустить их в продажу, потом через некоторое время вновь купить эти ценные бумаги и возратить долг. Если клиент предполагает, что взятые в долг ценные бумаги через некоторое время упадут в цене, то при возврате долга в виде фиксированного количества этих бумаг он сможет приобрести их за меньшую сумму, чем сумма, которая была получена при первой продаже сразу после взятия их в долг. Доход клиента (без учета операционных издержек и оплаты услуг брокера) составит разность между ценой продажи ценных бумаг, взятых в долг, и ценой их покупки через некоторое время для возврата долга. Клиент получит выигрыш от участия в данной операции, если он правильно предвидит возможность падения данных акций в цене. С другой стороны, данная операция сопряжена со значительным риском. Если цена акций не упадет, а, наоборот, возрастет, то клиент останется в проигрыше.

Введем следующие обозначения. Пусть V — матрица, элементами которой являются ковариации V_{ij} :

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{n1} & V_{n2} & \dots & V_{nn} \end{pmatrix},$$

причем $V_{ij} = V_{ji}$, $i \neq j$, то есть V — симметричная матрица;

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец ожидаемых эффективностей;}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец долей вложений;}$$

I — матрица-столбец с единичными элементами размерности $n \times 1$.

С учетом введенных обозначений задачу оптимизации структуры портфеля можно записать в векторно-матричной форме: минимизировать

$$V_p = x^T V x \rightarrow \min_x \quad (7.1)$$

при двух ограничениях вида

$$m^T x = m_p, \quad (7.2)$$

$$I^T x = 1. \quad (7.3)$$

Здесь верхний индекс T означает транспонирование матрицы.

Имеем задачу на условный экстремум (минимум). Эту задачу можно решить, используя метод множителей Лагранжа. Введем функцию Лагранжа

$$L = x^T V x + \lambda_1 (I^T x - 1) + \lambda_2 (m^T x - m_p),$$

где λ_1 , λ_2 — множители Лагранжа.

Решение задачи на условный экстремум должно удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2Vx + \lambda_1 I + \lambda_2 m = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= I^T x - 1 = 0, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = m^T x - m_p = 0. \quad (7.5)$$

Из первого соотношения определим

$$x = -\frac{\lambda_1}{2} V^{-1} I - \frac{\lambda_2}{2} V^{-1} m. \quad (7.6)$$

Подставляя выражение (7.6) в уравнения (7.4), (7.5), получим систему двух уравнений для определения λ_1 и λ_2 :

$$-\frac{\lambda_1}{2} I^T V^{-1} I - \frac{\lambda_2}{2} I^T V^{-1} m = 1, \quad -\frac{\lambda_1}{2} m^T V^{-1} I - \frac{\lambda_2}{2} m^T V^{-1} m = m_p.$$

Решая эту систему относительно λ_1 и λ_2 и подставляя найденные значения этих величин в уравнение (7.6) для x , определим явное выражение для оптимальной структуры портфеля. Обозначим такую структуру x^* . Имеем

$$x^* = V^{-1} \left[m_p (IJ_{12} - mJ_1) + mJ_{12} - IJ_2 \right] \left[J_{12}^2 - J_1 J_2 \right]^{-1},$$

где использованы обозначения:

$$J_1 = I^T V^{-1} I, \quad J_2 = m^T V^{-1} m, \quad J_{12} = I^T V^{-1} m.$$

Заметим, что полученное решение линейно относительно ожидаемой эффективности портфеля m_p . Следовательно, минимальное значение вариации портфеля $V_p^* = x^{*T} V x^*$ является выпуклой функцией аргумента m_p . Очевидно, это верно и для функции $\sigma_p^* = \sqrt{V_p^*}$ — стандартного отклонения портфеля.

Характер изменения σ_p^* в зависимости от ожидаемой эффективности представлен на графике (рис. 8.2).



Рис. 8.2

Таким образом, при изменении ожидаемой эффективности портфеля вклады в каждую ценную бумагу изменяются линейно, если допустима операция взятия ценных бумаг в долг. При этом можно сформировать портфель с любой ожидаемой эффективностью, но и риск такого портфеля будет возрастать.

8.3 Оптимизация портфеля при возможности безрисковых вложений

На рынке ценных бумаг, кроме рискованных, имеются и безрисковые ценные бумаги типа краткосрочных государственных обязательств с фиксированным доходом. Учитывая это, задачу инвестора можно сформулировать так: необходимо распределить капитал между безрисковыми и рискованными ценными бумагами и одновременно определить структуру рискованных вложений. Рассмотрим решение данной задачи.

Пусть r_0 — эффективность (ставка доходности) безрискового вложения, детерминированная величина. Задачу оптимизации портфеля с учетом безрисковых вложений сформулируем следующим образом: минимизировать критерий вида (вариацию рискованной части портфеля)

$$V_p = x^T V x \rightarrow \min_x \quad (7.7)$$

при ограничениях

$$m^T x + r_0 x_0 = m_p, \quad (7.8)$$

$$I^T x + x_0 = 1, \quad (7.9)$$

где x_0 — доля капитала, которая вкладывается в безрисковые ценные бумаги. Если наложены дополнительные ограничения вида $x_j \geq 0$ ($j=1,2,\dots,n$), то имеем задачу квадратичного программирования.

Решим данную задачу без учета ограничений на неотрицательность переменных x_j . Имеем задачу на условный экстремум. Будем её решать, используя метод множителей Лагранжа. Необходимо определить оптимальные значения вектора x и переменной x_0 .

Построим функцию Лагранжа:

$$L = x^T V x + \lambda_1 (I^T x + x_0 - 1) + \lambda_2 (m^T x + r_0 x_0 - m_p).$$

Условия минимума функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0.$$

Взяв производные по dx и dx_0 , получим систему линейных уравнений относительно λ_1 и λ_2 :

$$2Vx + \lambda_1 I + \lambda_2 m = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 r_0 = 0.$$

Решая эту систему относительно λ_1 и вектора x , получим:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\lambda_2 r_0, \\ x &= V^{-1}(I r_0 - m) \frac{\lambda_2}{2}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

С другой стороны, исключая x_0 из ограничений задачи (7.8), (7.9), получим равенство:

$$(m - r_0 I)^T x = m_p - r_0.$$

Подставим в это соотношение выражение (7.10) для x и из получившегося уравнения определим λ_2 :

$$\lambda_2 = -\frac{2(m_p - r_0)}{(m - r_0 I)^T V^{-1}(m - r_0 I)}. \quad (7.11)$$

Далее, подставляя (7.11) в уравнение (7.10) для x , получим явное выражение для оптимальной структуры портфеля:

$$x^* = V^{-1}(m - r_0 I) \left[(m - r_0 I)^T V^{-1}(m - r_0 I) \right]^{-1} (m_p - r_0),$$

где x^* — структура рисковей части оптимального портфеля.

Заметим, что величина m_p — ожидаемая эффективность портфеля — входит в это выражение линейно, как скалярный множитель, следовательно, структура рисковей вложений не зависит от величины m_p . Подставляя выражение для x^* в формулу для величины вариации портфеля, получим выражение для минимальной вариации портфеля:

$$\begin{aligned} V_p^* &= x^{*T} V x^* = (m_p - r_0)^2 g^{-2}, \\ g^2 &= (m - r_0 I)^T V^{-1}(m - r_0 I). \end{aligned}$$

Стандартное отклонение портфеля равно $\sigma_p^* = g^{-1}(m_p - r_0)$.

Отсюда имеем

$$m_p = r_0 + g\sigma_p^*. \quad (7.12)$$

Таким образом, ожидаемая эффективность оптимального портфеля и его стандартное отклонение связаны между собой линейно, при условии, что есть безрисковые вклады. Очевидно, при $x_0 = 0$ оптимальный портфель состоит только из рискованных ценных бумаг, при $x_0 = 1$ в портфель включаются только безрисковые ценные бумаги. Поскольку при отсутствии безрисковых вкладов оптимальное решение задачи (7.1) — (7.3) должно совпадать с решением задачи (7.7) — (7.9), причем это решение единственно, то прямая (7.12) должна касаться кривой $\sigma_p^* = \sigma_p^*(m_p)$ в единственной точке (рис. 8.3). Любому промежуточному значению $0 < x_0 < 1$ соответствует точка на касательной, описываемой уравнением (7.12).

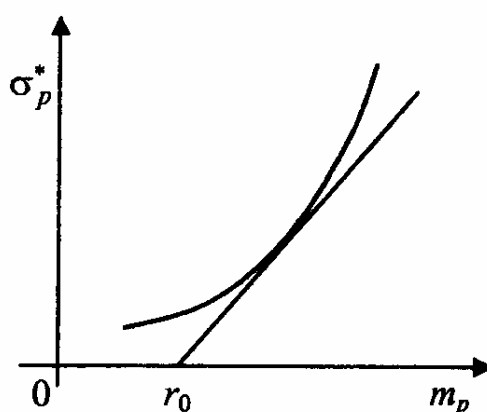


Рис. 8.3

Основной вывод из полученного результата формулируется в виде теоремы разделения: если имеется возможность делить капитал не только между заданным рисковым портфелем и безрисковыми ценными бумагами, но и одновременно выбирать структуру рискового портфеля, то оптимальной окажется только одна такая структура, не зависящая от склонности инвестора к риску.

Или, другими словами, оптимальная для любого инвестора комбинация рискованных ценных бумаг не зависит от его склонности к риску.

Основные качественные выводы, полученные выше, остаются в силе и при условии, что на переменные x_j наложены условия неотрицательности (напомним, что в этом случае задача оптимизации превращается в математическую задачу квадратичного программирования).

8.4 Оценка вклада ценной бумаги в общую ожидаемую эффективность портфеля

Определим величины

$$\beta_j^* = \frac{1}{V_p^*} M \left\{ (R_j - m_j)(R_p^* - m_p) \right\},$$

которые называются бета-вклада j относительно оптимального портфеля.

Данные коэффициенты характеризуют статистическую взаимосвязь между эффективностью портфеля в целом и ценной бумаги j -го вида и играют важную роль в теории оптимального портфеля. Введем вектор-столбец $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_n^*)^T$. Тогда можно записать

$$\beta^* = \frac{1}{V_p^*} M \left\{ (R - m)(R_p^* - m_p) \right\}.$$

Эффективность оптимального портфеля:

$$R_p^* = r_0 x_0 + \sum_{j=1}^n R_j x_j^* = r_0 x_0 + R^T x^* ;$$

$R_p^* - m_p = r_0 x_0 - m_p + R^T x^* = r_0 x_0 - (r_0 x_0 + m^T x^*) + R^T x^* = (R - m)^T x^*$, где R — вектор-столбец эффективностей ценных бумаг, его компоненты — эффективности R_j . Возвращаясь к выражению для β^* и подставляя в него вместо $(R_p^* - m_p)$ полученное выражение, можно записать:

$$\beta^* = \frac{1}{V_p^*} M \left\{ (R - m)(R - m)^T x^* \right\} = \frac{1}{V_p^*} V x^* ,$$

где $M \left\{ (R - m)(R - m)^T \right\} = V$.

Учитывая формулы для x^* и V_p^* , получим

$$\beta^* = \frac{m - r_0 I}{m_p - r_0}.$$

Обычно это соотношение записывают в следующем виде:

$$m - r_0 I = \beta^* (m_p - r_0)$$

или в скалярном виде: $m_j - r_0 = \beta_j^* (m_p - r_0)$.

Превышение ожидаемой эффективности рисковой ценной бумаги или портфеля ценных бумаг над эффективностью безрискового вклада называют **премией за риск**. В данном случае разность $(m_j - r_0)$ — премия за риск j -й ценной бумаги, разность $(m_p - r_0)$ — премия за риск портфеля.

Таким образом, премия за риск любой ценной бумаги, включенной в оптимальный портфель, пропорциональна премии за риск для портфеля в целом. Коэффициентом пропорциональности является бета-вклада j относительно портфеля. Чем больше коэффициент бета-данной ценной бумаги, тем выше доля общего риска, связанная с вложением именно в эту ценную бумагу, но, с другой стороны, тем больше премия за риск.

8.5 Модель ценообразования на конкурентном финансовом рынке

В данном разделе рассматривается модель формирования цен на рынке финансовых активов (The Capital Asset Pricing Model, CAPM). При построении этой модели предполагается, что инвесторы при формировании своих портфелей используют метод, описанный в предыдущих разделах.

Введем понятие идеального конкурентного рынка. Идеальный конкурентный рынок — это рынок, все участники которого располагают одинаковой информацией и на ее основе принимают наилучшие решения. Это означает, что все участники рынка ознакомлены со статистическим прогнозом эффективностей всех ценных бумаг на рынке, знают оценки вариации и ковариации эффективностей ценных бумаг и любой участник рынка стремится

ся сформировать оптимальную структуру своего портфеля ценных бумаг.

Из теоремы разделения следует, что структура рисковой части оптимального портфеля не зависит от склонности инвестора к риску и полностью определяется вероятностными характеристиками рискованных ценных бумаг. Отсюда следует, что, опираясь на одинаковую информацию, все инвесторы будут стремиться выбирать одну и ту же структуру рисковой части своего портфеля. Таким образом, если на реальном рынке сложились условия, когда его поведение в течение длительного периода времени определяют участники, располагающие почти одинаковой информацией, в одинаковом объеме и принимающие наилучшие возможные решения о формировании своего портфеля ценных бумаг, то на таком рынке распределение рискованных ценных бумаг будет иметь свойства, близкие к свойствам оптимального портфеля. Следовательно, инвестор может довериться рынку и выбрать портфель с той же структурой рисковой части, что и портфель рынка в целом. В какой пропорции разделить капитал на рисковую и безрисковую части каждый инвестор решает сам, в зависимости от своей склонности к риску.

Для оптимального портфеля ранее было получено уравнение:

$$m_j - r_0 = \beta_j(m_p - r_0).$$

Поскольку, согласно САРМ, портфель рынка имеет такую же структуру, что и оптимальный портфель, можно утверждать, что аналогичное уравнение имеет место и для рынка в целом. Таким образом, получаем **основное уравнение равновесного рынка**:

$$m_j - r_0 = \beta_j(m_m - r_0),$$

где m_m — ожидаемая эффективность рынка в целом. Коэффициент β_j в этом уравнении называется **бета-ценной бумаги вида j относительно рынка**.

Реальный рынок отличается от идеального. Статистический анализ рынка указывает на справедливость более общего соотношения, а именно:

$$m_j - r_0 = \beta_j(m_m - r_0) + \alpha_j,$$

где α_j — некоторый параметр, который называют альфа-вклада j . На идеальном рынке этот параметр для всех ценных бумаг равен нулю. Однако поскольку на реальном рынке не все участники одинаково информированы и не все стремятся действовать оптимально, то и портфель реального рынка отличается от оптимального. Кроме того, в CAPM предполагается, что ставки при покупке и продаже и ставки по кредитам одинаковы, но для реального рынка это не так.

Все эти параметры можно оценить, основываясь на прошлых статистических данных об эффективности ценных бумаг (технический анализ рынка), используя методы математической статистики.

Фундаментальный анализ предполагает прогноз эффективностей, исходя из анализа и оценки экономических факторов, влияющих на эффективности ценных бумаг.

8.6 Статистический анализ финансового рынка

Однофакторная рыночная модель

Теория оптимального портфеля базируется на том, что инвестор знает статистические характеристики ценных бумаг: их ожидаемые эффективности m_i и ковариаций V_{ij} . Эти величины можно оценить методами математической статистики, основываясь на данных о прошлых значениях эффективностей ценных бумаг, достаточно длительное время присутствующих на рынке. Рассмотрим метод, основанный на построении однофакторной рыночной модели.

Наблюдения показывают, что эффективность обыкновенной акции за некоторый период времени (например, месяц) связана с эффективностью рынка в целом. Однако поскольку точно определить структуру рыночного портфеля не удастся, для измерения эффективности рынка используют рыночные индексы — взвешенные с учетом капитала суммы эффективностей акций ведущих корпораций (в Соединенных Штатах это, например, индекс Доу-Джонса или *SP500* индекс — *Standart and Poor's 500 Stock Index*, при расчете которого учитываются акции пятисот круп-

нейших корпораций). Данную взаимосвязь можно выразить в виде **рыночной модели**:

$$R_j = a_j + \beta_j R_m + e_j,$$

где R_j — доходность ценной бумаги j за данный период; R_m — эффективность рынка (рыночный индекс); a_j — коэффициент смещения; β_j — коэффициент наклона; e_j — случайная погрешность.

Коэффициент наклона рыночной модели называют бета-коэффициентом и определяют по формуле

$$\beta_j = \frac{V_{jm}}{V_m},$$

где $V_{jm} = M \{(m_j - R_j)(R_m - m_m)\}$, $V_m = M \{(R_m - m_m)^2\}$. Если для каких-либо акций $\beta_j > 1$, то такие акции называются «агрессивными», если $\beta_j < 1$, то такие акции называются «оборонительными». Отметим, что в рыночной модели коэффициент β_j измеряется относительно рыночного индекса, в то время как в модели равновесного рынка САРМ аналогичные коэффициенты определены относительно рынка в целом. На практике в качестве оценки коэффициентов β_j в САРМ используют коэффициенты бета относительно рыночного индекса.

Случайная погрешность в данном уравнении отражает тот факт, что рыночная модель неточно описывает доходности ценных бумаг. Обычно предполагают, что случайная переменная e_j имеет распределение вероятностей с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением σ_{ej}^2 , причем случайные погрешности различных ценных бумаг взаимно не коррелированы и не коррелированы с R_m , то есть $M \{e_i e_j\} = 0$, $i \neq j$ и $M \{e_j R_m\} = 0$.

Из уравнения рыночной модели получаем, что ожидаемое значение эффективности j -й ценной бумаги

$$m_j = a_j + \beta_j m_m,$$

где m_m — ожидаемое значение эффективности рынка (рыночного индекса). Отсюда

$$R_j - m_j = \beta_j(R_m - m_m) + e_j.$$

Используя это соотношение, получим выражение для вариаций и ковариаций

$$V_j = M \{(R_j - m_j)^2\} = \beta_j^2 M \{(R_m - m_m)^2\} + M \{(e_j^2)\} = \beta_j^2 V_m + V_{ej},$$

$$V_{ij} = M \{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\} = \beta_i \beta_j M \{(R_m - m_m)^2\} = \beta_i \beta_j V_m,$$

где V_m — вариация эффективности рынка, V_e — вариация случайной погрешности.

Таким образом, для оценки ожидаемых эффективностей, вариаций и ковариаций ценных бумаг необходимо оценить параметры a_j , β_j , ожидаемое значение эффективности рынка m_m , а также вариации рынка V_m и случайной погрешности V_e . Для оценки этих величин можно применить статистические процедуры, например метод наименьших квадратов. Если известны последовательности наблюдений эффективностей ценных бумаг $R_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$ и последовательность эффективностей рынка $R_m(t)$, где $t = 1, 2, \dots, T$, то метод наименьших квадратов дает следующие оценки:

$$\begin{aligned} \hat{a}_j &= \hat{m}_j - \hat{\beta}_j \hat{m}_j; \quad \hat{\beta}_j = \frac{\hat{V}_{jm}}{\hat{V}_m}; \\ \hat{m}_j &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_j(t); \quad \hat{m}_m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_m(t); \\ \hat{V}_{jm} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T [(R_m(t) - \hat{m}_m)(R_j(t) - \hat{m}_j)]; \\ \hat{V}_m &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T [(R_m(t) - \hat{m}_m)^2]; \\ \hat{V}_{ej} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T [(R_m(t) - \hat{a}_j - \hat{\beta}_j R_m)^2]. \end{aligned}$$

Соответственно оценки вариаций и ковариаций ценных бумаг имеют вид

$$\hat{V}_j = \hat{\beta}_j^2 \hat{V}_m + \hat{V}_{ej},$$

$$\hat{V}_{ij} = \hat{\beta}_i \hat{\beta}_j \hat{V}_m.$$

Многофакторные модели

Состояние экономики зависит от многих факторов, среди которых можно выделить несколько основных, оказывающих влияние на все сферы экономики:

- темпы прироста валового внутреннего продукта;
- уровень процентных ставок;
- уровень инфляции;
- уровень цен на нефть.

Учет этих (а возможно, и других) факторов позволяет построить более точные модели доходностей ценных бумаг. Общая многофакторная модель записывается в виде

$$R_i(t) = a_i + b_{i1}F_1(t) + b_{i2}F_2(t) + \dots + b_{ik}F_k(t) + e_i,$$

где $F_i(t)$ — факторы, оказывающие влияние на доходности всех ценных бумаг;

a_i , b_{is} ($s = 1, 2, \dots, k$) — параметры (параметры b_{is} называют чувствительностями ценной бумаги i к соответствующим факторам), $e_i(t)$ — случайная ошибка.

Очевидно, построение рассмотренных факторных моделей должно быть основано на достоверной статистической информации.

Глава 9. ОБЩИЕ МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЙ РИСКОВ

Как правило, риск стараются уменьшить. Для этого существует немало методов. Большая группа таких методов связана с подбором других операций, таких, чтобы суммарная операция имела меньший риск.

9.1 Диверсификация

Напомним, что дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсии. Из этого вытекает следующее утверждение, лежащее в основе метода диверсификации.

Утверждение 1. Пусть $Q_1, \dots, Q_n$ — некоррелированные операции с эффективностями $e_1, \dots, e_n$ и рисками $r_1, \dots, r_n$. Тогда операция «среднее арифметическое» $Q = (Q_1 + \dots + Q_n)/n$ имеет эффективность $e = (e_1 + \dots + e_n)/n$ и риск $r = \sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2} / n$.

Доказательство этого утверждения следует из теории вероятности.

Следствие 1. Пусть операции некоррелированы и $a \leq e_i$ и $b \leq r_i \leq c$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда эффективность операции «среднее арифметическое» не меньше a (т.е. наименьшей из эффективностей операций), а риск удовлетворяет неравенству $b/\sqrt{n} \leq r \leq c/\sqrt{n}$ и, таким образом, при увеличении n уменьшается. Итак, при увеличении числа некоррелированных операций их среднее арифметическое имеет эффективность из промежутка эффективностей этих операций, а риск однозначно уменьшается.

Этот вывод называется эффектом диверсификации (разнообразия) и представляет собой, в сущности, единственно разумное правило работы на финансовом и других рынках. Этот же эффект воплощен в народной мудрости — «не клади все яйца в одну корзину». Принцип диверсификации гласит, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом операции, тогда эффективность окажется усредненной, а риск однозначно уменьшится.

При применении этого правила нужно быть осторожным. Так, нельзя отказаться от некоррелированности операций.

Утверждение 2. Предположим, что среди операций есть ведущая, с которой все остальные находятся в положительной корреляционной связи. Тогда риск операции «среднее арифметическое» не уменьшается при увеличении числа суммируемых операций.

Действительно, для простоты примем более сильное предположение, именно, что все операции Q_i , $i=1, \dots, n$ просто копируют операцию Q_1 в каких-то масштабах, т.е. $Q_i = k_i Q_1$ и все коэффициенты пропорциональности k_i положительны. Тогда операция «среднее арифметическое» $Q = (Q_1 + \dots + Q_n)/n$ есть просто

операция Q_1 в масштабе $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$ и риск этой операции

$r = r_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \right)$. Поэтому, если операции примерно одинаковы по

масштабности, т.е. $k_1 \approx 1$, то и $r = r_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \right) \approx r_1$.

Мы видим, что риск операции «среднее арифметическое» не уменьшается при увеличении числа операций.

Пример 9.1. Предположим, инвестор имеет возможность составить операцию из четырех некоррелированных операций, эффективности и риски которых даны в таблице.

i	1	2	3	4
e_i	3	5	8	10
r_i	2	4	6	8

Рассмотрим несколько вариантов составления операций из этих операций с равными весами.

Операция составлена только из 1-й и 2-й операций.

Тогда $e_{12} = (3 + 5)/2 = 4$; $r_{12} = \sqrt{2^2 + 4^2} / 2 \approx 2,34$.

Операция составлена только из 1-й, 2-й и 3-й операций.

Тогда $e_{123} = (3 + 5 + 8)/3 = 5,3$; $r_{123} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} / 3 \approx 2,49$.

Операция составлена из всех четырех операций.

Тогда

$$e_{1-4} = (3 + 5 + 8 + 10) / 4 = 6,5; \quad r_{1-4} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2 + 12^2} / 4 \approx 3,54. \quad \blacklozenge$$

Видно, что при составлении операции из все большего числа операций риск растет весьма незначительно, оставаясь близко к нижней границе рисков составляющих операций, а эффективность каждый раз равна среднему арифметическому составляющих эффективностей.

Принцип диверсификации применяется не только для усреднения операций, проводимых одновременно, но в разных местах (усреднение в пространстве), но и последовательно во времени, например при повторении операции во времени (усреднение во времени). Например, вполне разумной является стратегия покупки акций какой-нибудь стабильно работающей компании 20-го января каждого года. Неизбежные колебания курса акций этой компании благодаря этой процедуре усредняются, и в этом проявляется эффект диверсификации.

Теоретически эффект диверсификации только положителен — эффективность усредняется, а риск уменьшается. Однако усилия по проведению большого числа операций, по отслеживанию их результатов могут, конечно, свести на нет все плюсы от диверсификации.

9.2 Хеджирование

В эффекте диверсификации инвестор составлял новую операцию из нескольких, имеющихся в его распоряжении. При хеджировании (от англ. hedge — изгородь) инвестор подбирает или даже специально конструирует новые операции, чтобы, проводя их совместно с основной, уменьшить риск.

Пример 9.2. По контракту российская фирма через полгода должна получить крупный платеж от украинской компании. Платеж равен 100 000 гривен (примерно 600 тыс. руб.) и будет произведен именно в гривнах. У российской фирмы есть опасения, что за эти полгода курс гривны упадет по отношению к российскому рублю. Фирма хочет подстраховаться от такого падения и заключает форвардный контракт с одним из украинских банков на продажу тому 100 000 гривен по курсу 6 руб. за гривну. Таким

образом, что бы ни произошло за это время с курсом рубль—гривна, российская фирма не понесет из-за этого убытков.

В этом и заключается суть хеджирования. При диверсификации наибольшую ценность представляли независимые (или некоррелированные) операции. При хеджировании подбираются операции, жестко связанные с основной, но, так сказать, другого знака, говоря более точно, отрицательно коррелированные с основной операцией.

Действительно, пусть Q_1 — основная операция, ее риск r_1 , Q_2 — некоторая дополнительная операция, ее риск r_2 , Q — операция-сумма, тогда дисперсия этой операции $D = r_1^2 + r_2^2 + 2k_{12}r_1r_2$, где k_{12} — коэффициент корреляции эффективностей основной и дополнительной операций. Эта дисперсия может быть меньше дисперсии основной операции, только если этот коэффициент корреляции отрицателен (точнее: должно быть $2k_{12}r_1r_2 + r_2^2 < 0$, т.е. $k_{12} < -r_2/(2r_1)$).

Пример 9.3. Пусть ЛПР решает проводить операцию Q_1 .

Q_1	−10	20	S	5	−5
	0,5	0,5		0,5	0,5

Q_1	−10	20
S	5	−5
Q	−5	15
	0,5	0,5

Ему советуют провести одновременно операцию S , жестко связанную с Q_1 . В сущности, обе операции надо изобразить с одним и тем же множеством исходов.

Обозначим суммарную операцию через Q , эта операция есть сумма операций Q_1 и S . Вычислим характеристики операций:

$$M[Q_1] = 5, D[Q_1] = 225, r_1 = 15; M[S] = 0, D[S] = 25, \\ M[Q] = 5, D[Q] = 100, r = 10.$$

Средняя ожидаемая эффективность операции осталась неизменной, а риск уменьшился из-за сильной отрицательной кор-

релированности дополнительной операции S по отношению к основной операции.

Конечно, на практике не так легко подобрать дополнительную операцию, отрицательно коррелированную с основной, да еще с нулевой эффективностью. Обычно допускается небольшая отрицательная эффективность дополнительной операции, и из-за этого эффективность суммарной операции становится меньше, чем у основной. Насколько допускается уменьшение эффективности на единицу уменьшения риска, зависит от отношения инвестора к риску.

Универсальным инструментом хеджирования являются опционы.

9.3 Страхование

Можно рассматривать страхование как один из видов хеджирования. Поясним некоторые термины.

Страхователь (или застрахованный) — тот, кто страхуется.

Страховщик — тот, кто страхует.

Страховая сумма — сумма денежных средств, на которую застраховано имущество, жизнь, здоровье страхователя. Эта сумма выплачивается страховщиком страхователю при наступлении страхового случая. Выплата страховой суммы называется страховым возмещением.

Страховой платеж выплачивается страхователем страховщику.

Обозначим страховую сумму ω , страховой платеж s , вероятность страхового случая p . Предположим, что застрахованное имущество оценивается в z . По правилам страхования $\omega < z$.

Таким образом, можно предложить следующую схему:

Вероятности Операции	$1 - p$	p
Страхования нет	0	$-z$
Операция страхования	$-s$	$w - s$
Итоговая операция (страхование есть)	$-s$	$w - s - z$

Найдем характеристики операции без страхования и итоговой операции. Из теории страхования известно, что при нулевой рентабельности страховщика можно считать, что $s = p\omega$. Получаем

Операции	Характеристики страхования
Страхования нет	$M_1 = -pz, D_1 = p(1-p)z^2, r_1 = z\sqrt{p(1-p)}$
Операция страхования	
Итоговая операция	$M = -s(1-p) + p(\omega - s - z) = p(\omega - z) - s = -pz,$ $D = s^2(1-p) + p(\omega - s - z)^2 - (pz)^2$

Предположим далее, что $\omega = z$, т.е. страховое возмещение равно оценке застрахованного имущества, тогда $D = 0$.

Таким образом, страхование представляется выгоднейшим мероприятием с точки зрения уменьшения риска, если бы не страховой платеж. Иногда страховой платеж составляет заметную часть страховой суммы и представляет собой солидную сумму.

9.4 Качественное управление рисками

Риск — столь сложное понятие, что весьма часто невозможна его количественная оценка. Поэтому широко развиты методы управления риском качественного характера, без количественной оценки. К таким относятся многие банковские риски. Наиболее важные из них — это кредитный риск и риски неликвидности и неплатежеспособности.

1. Кредитный риск и способы его уменьшения. При выдаче кредита (или ссуды) всегда есть опасение, что клиент не вернет кредит. Предотвращение невозврата, уменьшение риска невозврата кредитов — это важнейшая задача кредитного отдела банка. Какие же существуют способы уменьшения риска невозврата кредита?

- Отдел должен постоянно систематизировать и обобщать информацию по выданным кредитам и их возвращению. Информация по выданным кредитам должна быть систематизирована по величине выданных кредитов, должна быть построена классифи-

кация клиентов, которые взяли кредит (физические лица, госорганы предприятия, другие банки и т.п.).

- Отдел (банк в целом) должен вести так называемую кредитную историю своих клиентов, в том числе и потенциальных (т.е. когда, где, какие кредиты брал и как их возвращал клиент). Пока у нас в стране большинство клиентов не имеет своей кредитной истории. Кроме того, обычно оценивается возможность возврата клиентом кредита с помощью анализа его баланса — если это банк; планов и технического уровня производства, перспектив развития — если это предприятие, и т.п.

- Есть различные способы обеспечения кредита, например клиент отдает что-то в залог и если не возвращает кредит, то банк становится собственником залога.

- В банке должна быть четкая инструкция по выдаче кредита (кому какой кредит можно выдать и на какой срок).

- Должны быть установлены четкие полномочия по выдаче кредита. Скажем, рядовой сотрудник отдела может выдать кредит не более \$1000, кредиты до \$10 000 может выдать начальник отдела, свыше \$10 000, но не более \$100 000, может выдать вице-президент по финансам и кредиты свыше \$100 000 выдает только совет директоров (читайте роман А. Хейли «Менялы»).

- Для выдачи особо больших и опасных кредитов объединяются несколько банков и сообща выдают этот кредит.

- Существуют страховые компании, которые страхуют невозврат кредита (но есть точка зрения, что невозврат кредита не подлежит страхованию — это риск самого банка).

- Существуют внешние ограничения по выдаче кредитов (например, установленные Центральным банком); скажем, не разрешается выдавать очень крупный кредит одному клиенту.

2. Риски неликвидности, неплатежеспособности и способы их уменьшения. Говорят, что средства банка достаточно ликвидны, если банк способен быстро и без особых для себя потерь обеспечить выплату своим клиентам денежных средств, которые они доверили банку на кратковременной основе. Риск неликвидности — это и есть риск не справиться с этим. Впрочем, этот риск лишь для краткости назван так, полное его название — риск несбалансированности баланса в части ликвидности.

Все активы банка по их ликвидности делятся на три группы:

1) первоклассные ликвидные средства (кассовая наличность, средства банка на корреспондентском счете в Центробанке, государственные ценные бумаги, векселя крупных надежных компаний); 2) ликвидные средства (ожидаемые краткосрочные платежи банку, некоторые виды ценных бумаг, некоторые материальные активы, которые могут быть быстро и без больших потерь проданы и т.п.); 3) неликвидные средства (просроченные кредиты и ненадежные долги, многие материальные активы банка, прежде всего здания и сооружения).

При анализе риска неликвидности учитываются в первую очередь первоклассные ликвидные средства.

Говорят, что банк платежеспособен, если способен расплатиться со всеми своими клиентами, но, возможно, для этого придется провести какие-нибудь крупные и длительные операции, вплоть до продажи оборудования, зданий, принадлежащих банку, и т.д. Риск неплатежеспособности возникает, когда неясно, сумеет ли банк расплатиться.

Платежеспособность банка зависит от очень многих факторов. Центральный банк устанавливает ряд условий, которые банки должны выполнять для поддержания своей платежеспособности. Самые важные из них: ограничение обязательств банка; рефинансирование банков Центральным банком; резервирование части средств банка на корреспондентском счете в Центральном банке.

Риск неликвидности ведет к возможным излишним потерям банка: чтобы расплатиться с клиентом, банку, возможно, придется одолжить деньги у других банков по более высокой процентной ставке, чем в обычных условиях. Риск неплатежеспособности вполне может привести к банкротству банка.

И ликвидность, и платежеспособность банка рассчитываются по специальным методикам, которые утверждаются Центральным банком. Он же утверждает специальные нормативы по ликвидности и платежеспособности, которые банки должны выполнять. В нынешних условиях, имея в банке хорошую вычислительную технику, банк ежедневно может рассчитывать эти нормативы и корректировать свои действия.

9.5 Форвардная и фьючерсная торговля

Уменьшить риск позволяют и форвардные контракты. Такие контракты обязательны для исполнения обеими сторонами в будущем по ценам, зафиксированным в момент заключения контракта. Например, 1 января фермер заключает форвардный контракт с мельником на поставку тому пшеницы в августе по определенной цене. В январе невозможно предсказать, каков будет урожай пшеницы и какова будет реальная цена пшеницы в августе. Если она будет выше, чем в контракте, — прогадает фермер, а мельник выиграет; если цена будет ниже — выиграет фермер, а в проигрыше окажется мельник. Фьючерсные контракты — это также форвардные, но они стандартизованы, обезличены и ими торгуют на биржах.

Но почему такие контракты уменьшают риск? Дело в том, что снижение риска здесь происходит не только напрямую, но и косвенным образом: несомненно, что форвардные контракты делают рынок более предсказуемым, более стабильным, а значит, менее рискованным. Форвардные контракты напоминают постройку далеко впереди маяков, к которым идут участники рынка.

Вообще верно общее утверждение — все, что делается открыто, с прицелом, прогнозом на будущее, с ясными поставленными целями, понятными всем, и т.п. — все это увеличивает предсказуемость, стабильность экономики, уменьшает риск. Верно и обратное — все, что делается тайно, без объявления целей, непредсказуемо, — все уменьшает стабильность рынка и увеличивает рискованность операций на таком рынке.

Чрезвычайно важным примером здесь является кредитование. Напомним, что это долгосрочная ссудная операция под небольшие проценты под залог недвижимости заемщика, причем договоры об ипотечной ссуде действуют в неизменном виде десятки лет. В такой стране, как США, тысячи фирм занимаются таким кредитованием. Они представляют мощную силу, противостоящую любой нестабильности в стране, а также инфляции, которые могут значительно уменьшить их нормальную работу, а то и привести к разорению.

Капитализм извлек хороший урок из Великой депрессии 1929—1938 гг. В 1934 г. из-за несравнимости финансовых отчетов и по ряду других причин Конгресс США создал специальную комиссию по биржам и ценным бумагам. Одна из целей работы этой комиссии — обеспечить точность финансовой информации в отчетах фирм, объективное отражение экономических действий, что уменьшает риск.

В заключение обобщим пример 9.2: хеджирование в валютных сделках. Форвардный валютный контракт — это сделка, определяющая сумму валюты, которая должна быть обменена на другую валюту в определенный день в будущем по курсу, который записан в контракте. Форвардные операции служат для хеджирования возникающего валютного риска. Например, российский импортер купил товар в Германии. Счет был выписан в немецких марках и должен быть оплачен через 90 дней. Для устранения риска повышения курса немецкой марки за этот период импортер осуществляет форвардную покупку немецких марок.

Валютный своп — соглашение на обмен оговоренного объема одной валюты на другую валюту на определенную будущую дату или на определенные будущие даты.

Спот-операция — на валютном рынке — покупка или продажа валюты с немедленной поставкой и оплатой. Практика рынка иностранных валют допускает поставку в течение двух рабочих дней после заключения сделки.

9.6 Опционы

Опционы являются производными ценными бумагами, производным финансовым инструментом. Организованная торговля ими началась только в 1973 г. В данной главе рассматриваются использование опционов для уменьшения риска финансовых операций, а также определение цены на них.

В мире инвестирования опционом (option) называется контракт, заключенный между двумя лицами, в соответствии с которым одно лицо предоставляет другому лицу право купить определенный актив по определенной цене в рамках определенного периода времени или предоставляет право продать определенный актив по определенной цене в рамках определенного периода

времени. Лицо, которое получило опцион и таким образом приняло решение, называется покупателем опциона, который должен платить за это право. Лицо, которое продало опцион, отвечающее на решение покупателя, называется продавцом опциона.

Опцион на покупку (call-option) дает право его владельцу (держателю опциона) купить актив по установленной в этом документе цене не позже определенной даты (американский опцион) или на момент такой даты (европейский опцион). Цена эта называется ценой исполнения. Владелец опциона может отказаться от указанной покупки актива без всяких штрафов.

Аналогично *опцион на продажу* (put-option) дает право его владельцу продать актив по установленной в этом документе цене не позже определенной даты (американский опцион) или на момент такой даты (европейский опцион).

Далее рассматриваются только европейские опционы.

Тот, кто выписал опцион, т.е. его продавец, несет определенное обязательство во все время действия опциона. В частности, если он выписал опцион на покупку, то несет обязательство обеспечить поставку актива по цене исполнения в момент исполнения опциона, а если он выписал опцион на продажу, то должен купить актив по цене исполнения в момент исполнения опциона.

Наоборот, держатель опциона никаких обязательств не несет, но он покупает опцион и платит выписавшему опцион некоторую сумму, называемую премией или просто стоимостью опциона. Рассмотрим более подробно европейский опцион на покупку. Когда наступает дата исполнения опциона, то держатель опциона сравнивает рыночную цену на актив S и цену исполнения R , т.е. указанную в опционе. Если $S > R$, то он реализует свое право покупки актива по цене R , покупает актив по этой цене (и может немедленно же его продать и получить прибыль $S - R$). Но как фактически реализуется его право купить актив по более низкой цене, чем рыночная? Это право ему обеспечивает продавец опциона, поставляя физический актив или доплачивая разницу $S - R$ держателю опциона (эти обязательства обеспечиваются специальным биржевым механизмом — клиринговой палатой). Держатель опциона оказывается в выигрыше, и тем больше, чем больше разница $S - R$. Но если рыночная цена не превышает цену исполнения, то держателю опциона незачем поку-

пять актив. В этом случае он в проигрыше, так как за опцион он заплатил премию и она пропала зря.

Следовательно, опцион на покупку покупают тогда и те, кто надеется на повышение рыночной цены актива к дате исполнения опциона.

Аналогично обстоит дело и с опционами на продажу.

Пример.

Рассмотрим гипотетический пример, в котором инвесторы А и В решают заключить контракт с опционом «колл». Этот контракт позволит инвестору А купить 100 акций компании Газпром у инвестора В по \$50 за акцию в любой момент в течение последующих шести месяцев. В настоящее время акции компании Газпром продаются на бирже по \$45 за штуку. Инвестор А — потенциальный покупатель опциона — полагает, что курс обыкновенных акций Газпром существенно вырастет за последующие шесть месяцев. Инвестор В — потенциальный продавец опциона — считает иначе: он думает, что курс акций не поднимется за этот период времени выше \$50.

Согласится ли инвестор В подписать контракт и не получить ничего взамен от инвестора А? Нет, не согласится. Подписывая контракт, В идет на риск и потребует за это компенсацию. Риск состоит в том, что курс акции Газпром в дальнейшем превысит \$50. В этом случае инвестору В придется купить акции по этому курсу и передать их А только по \$50 за акцию. Возможно, курс превысит \$60, в результате покупка акций обойдется инвестору В в \$6000 ($\$60 \cdot 100$ акций). Затем инвестор В передаст 100 акций инвестору А и получит взамен \$5000 ($\$50 \cdot 100$ акций). Таким образом, инвестор В потеряет ($\$6000 - \$5000 = \$1000$).

Выход заключается в том, что покупатель опциона «колл» должен будет заплатить продавцу некоторую сумму, чтобы убедить продавца подписать контракт. Уплачиваемая сумма называется премией (premium), хотя более подходящий термин — это цена опциона. Допустим, что в примере премия равна \$3 за акцию. Это означает, что инвестор А заплатит \$300 ($\$3 \cdot 100$ акций) инвестору В, чтобы он подписал контракт. Так как инвестор А ожидает повышения в будущем курса акций Газпром, то он будет надеяться получить прибыль, купив акции Газпром за \$45. При-

влекательность приобретения опциона «колл» вместо акций состоит в том, что инвестор А может использовать заемные средства, так как для приобретения опциона требуется затратить только \$3 на акцию.

В зависимости от соотношения между ценой актива в момент продажи опциона S и ценой исполнения R , указанной в нем, опционы называются *опционами с выигрышем, с нулевым выигрышем и с проигрышем*. Для опционов колл (на покупку) это означает, что $S > R$, $S = R$ и $S < R$.

Торговля опционами — дело довольно сложное и происходит на биржах. Сегодня в мире опционов ежедневно продают и покупают миллионы штук. Дело, однако, редко доходит до поставки физических активов. Обычно проигравшая сторона оплачивает свой проигрыш деньгами.

Как выше сказано, американский опцион можно предъявить к исполнению в любой момент не позже определенной даты. Поэтому держатель такого опциона все время в напряжении: а вдруг сейчас и есть этот самый выгодный момент и дальше может быть только хуже. Из-за этой возможности выбора наивыгоднейшего момента американский опцион должен быть дороже; это подтверждают и теория, и практика.

Глава 10. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Общие указания

Вариант контрольной работы определяется студентом по формуле:

$$V = (N \cdot P) \text{div}(100),$$

где V — искомый номер варианта;

N — количество вариантов (в данном случае 30);

P — значение двух последних цифр пароля (0..99);

div — операция целочисленного деления.

Отчет по лабораторной работе должен быть оформлен в редакторе MS Word. Необходимо указать номер Вашего варианта. При ответе на теоретические вопросы требуется изучить и обдумать соответствующий теоретический материал из учебного пособия, кратко и четко сформулировать ответ и изложить его, используя соответствующую терминологию. При решении практических заданий необходимо полностью приводить ход решения. Для решения практических задач рекомендуется использовать табличный редактор Excel или математический пакет MathCad.

Пример выполнения типового варианта лабораторной работы

Вопрос 1. Аксиомы технического анализа.

Ответ: Технический анализ — это исследование динамики рынка, чаще всего посредством графиков, с целью прогнозирования будущего направления движения цен. Технический анализ включает в себя несколько различных подходов к изучению динамики цен, которые взаимосвязаны между собой в рамках одной стройной теории.

Три аксиомы технического анализа формулируются следующим образом:

Рынок учитывает все.

Суть этой аксиомы заключается в том, что любой фактор, влияющий на стоимость ценной бумаги: экономический, политический, психологический, заранее учтен и отражен на ценовом

графике. Другими словами, на любое изменение цены есть соответствующее изменение внешних факторов. Главным следствием этой предпосылки является необходимость внимательного отслеживания и изучения динамики цен. Анализируя ценовые графики и множество дополнительных индикаторов, технический аналитик добивается того, что рынок сам указывает ему наиболее вероятное направление своего движения.

Движение цен подчинено тенденциям.

Это предположение стало основой для создания всех методик технического анализа, поскольку рынок, подверженный тенденциям, в отличие от хаотичного рынка можно анализировать. Из положения о том, что движение цен подчинено тенденциям, проистекают два следствия. Следствие первое заключается в том, что действующая тенденция, по всей вероятности, будет развиваться далее, а не обращаться в собственную противоположность, то есть этим следствием исключается неупорядоченное, хаотичное движение рынка. Следствие второе говорит о том, что действующая тенденция будет развиваться до тех пор, пока не начнет движение в обратном направлении.

История повторяется.

Технический анализ и исследования динамики рынка теснейшим образом связаны с изучением человеческой психологии. Так, графические ценовые модели, которые были выделены и классифицированы в течение последних ста лет, отражают важнейшие особенности психологического состояния рынка. Прежде всего, они указывают, какие настроения, бычьи (игра на повышение) или медвежьи (игра на понижение), господствуют в данный момент на рынке. И если в прошлом эти модели работали, есть все основания предполагать, что и в будущем они будут работать, поскольку основываются они на человеческой психологии, которая с годами не изменяется.

Вопрос 2. Общий доход от облигаций.

Ответ: Общий доход от облигаций складывается из трёх элементов:

- 1) периодически выплачиваемого купонного дохода;
- 2) изменения рыночной цены облигации за определённый период времени.

Если облигация была куплена по цене ниже номинала, или, как говорят, с дисконтом, то этот элемент доходности — положительная величина. Если облигация была куплена по цене выше номинала, или, как говорят, с премией, то этот элемент доходности будет отрицательной величиной. Если покупная цена равна номиналу, то этот элемент доходности отсутствует;

3) дохода от реинвестиции поступления от купонов.

Показатель полной доходности измеряет реальную финансовую эффективность облигации для инвесторов и обычно определяется в виде годовой ставки сложных процентов. Эту ставку называют доходность к погашению или обещанная доходность к погашению. На рынке ценных бумаг эта ставка непосредственно не фигурирует. Это расчетная величина, которую можно определить только исходя из рыночной цены облигации.

Методика расчета полной доходности облигации основана на определении современной стоимости потока платежей, получаемых владельцем облигации. При этом дисконтирование платежей осуществляется по искомой ставке доходности к погашению.

Вопрос 3. Методы анализа финансовых рынков. Фундаментальный анализ.

Ответ: Существует два главных метода анализа финансовых рынков — фундаментальный анализ и технический анализ.

Школа фундаментального анализа рынка возникла с развитием прикладной экономической науки. За свою основу она взяла знания о макроэкономической жизни общества и ее влиянии на динамику цен конкретных товаров.

Фундаментальный анализ — это направление в анализе ценных бумаг, которое стремится определить их истинные стоимости, исходя из изучения связанных с ними экономических факторов. Истинные стоимости сравниваются с текущими ценами с целью определения величин отклонения. Однако для определения конкретного момента совершения сделки фундаментального анализа зачастую бывает недостаточно. В этой области применяется технический анализ.

Одними из наиболее важных инструментов фундаментального анализа являются кредитный и инвестиционный анализ, ос-

нованный на расчете всевозможных отношений курса акций к доходу на акцию. Специалист по фундаментальному анализу при изучении финансового эмитента основывается главным образом на двух типах бизнес-информации:

– на балансовом отчете, включающем сведения об активах, денежных обязательствах и о собственном капитале компании-эмитента на конкретный день года;

– в отчете о прибылях и убытках в компании, где указываются сумма и источник дохода компании и издержки, вовлеченные в получение этого дохода.

При фундаментальном анализе акций обычно учитывают следующие характеристики:

- прибыль на акцию;
- дивиденды и их динамику;
- доход компании, ее финансовое положение и перспективы;
- динамику рыночной цены акции;
- налоговый статус;
- механизм регистрации и передачи прав собственности;
- доступность и прозрачность информации;
- накладные расходы при операциях с акциями;
- ликвидность.

Вопрос 4. Что принимают в качестве меры риска от вложений в ценные бумаги?

Ответ:

Риск вложений в конкретные ценные бумаги связан с неопределённостью будущих доходов и, следовательно, с неопределённостью эффективности данной операции. Чем больше стандартное отклонение, тем больше в среднем случайная величина может отклониться от своего ожидаемого значения, тем больше неопределённость и выше риск. С другой стороны, если $\sigma = 0$, то эффективность не отклоняется от своего ожидаемого значения, она принимает определённые не случайные значения, и риск отсутствует. Таким образом, стандартное отклонение характеризует уровень риска, связанный с конкретной ценной бумагой, и принимается в качестве меры риска.

Задача 1. Найдите курс облигации без погашения с периодической (раз в год) выплатой процентов при $q = 8\%$, $i = 5\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 120.

Решение.

Курс облигации K без погашения с периодической выплатой процентов вычисляется по формуле

$$K = \frac{100q}{p \cdot \left[(1+i)^{1/p} - 1 \right]},$$

где $p = 1$ (количество выплат купонных денег в году). Подставляя исходные данные, получим:

$$K = \frac{100 \cdot 0.08}{0.05} = 160.$$

Доходность облигации j с известным курсом вычисляется по формуле $j = 100q/K$ и равна $j = 100 \cdot 0.08/120 \approx 6.7\%$.

Задача 2. Вычислите доходность операции учета векселя по ставке $q = 30\%$ за 3 месяца до его оплаты (временная годовая база равна 360 дням — месяц равен 30 дням). При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5 % от достоинства векселя.

Решение.

Абсолютную доходность d операции без учета комиссионных найдем из уравнения $\frac{1}{(1-m \cdot q)} = 1 + d$, где $m = 90/360$ — срок учета векселя. Отсюда

$$d = \frac{1}{(1-0.25 \cdot 0.3)} - 1 = 8.1\%,$$

а с учетом комиссионных равна:

$$d = \frac{1}{(1-0.25 \cdot 0.3 - 0.005)} - 1 = 8.7\%.$$

Задача 3. Некто получил наследство в виде солидного банковского счета D и теперь его «проедает», беря каждый год со счета в банке определенную сумму R и тратя ее в течение года. По сути это «перевернутый» инвестиционный процесс. Введите

понятия, аналогичные сроку окупаемости, внутренней норме доходности и т.п.

Решение.

В данном случае мы имеем перевернутый инвестиционный проект. В качестве инвестиций выступает счет в банке K , на который банк начисляет проценты. В качестве доходов от инвестиций мы имеем сумму R , которую снимает наследник ежегодно в банке. Поэтому срок окупаемости такого «проекта» будет равен сроку, за который наследник снимет всю сумму в банке. Внутренняя норма доходности — это предельная ставка процента, при которой за определенный срок наследник снимет всю сумму в банке.

Итак, срок окупаемости r , т.е. срок, в течение которого наследник снимет всю сумму, определится из уравнения

$K = R \frac{1 - (1+i)^{-r}}{i}$, где i — ставка банковского процента. Отсюда

получим $r = \frac{-\ln(1 - i \frac{K}{R})}{\ln(1+i)}$. Внутренняя норма доходности «проекта» определяется из того же уравнения, в котором срок r задан и нужно определить i .

Пусть $K = 30000$ д.е., $R = 10000$ д.е., ставка $i = 10\%$. Тогда для срока окупаемости получим $r = 3,74$ года, т.е. наследник проест свое наследство за 4 года, причем в последний 4-ый год он получит сумму, меньшую чем 10000 д.е. Найдем эту сумму. Имеем

$$a_{4,10} = \frac{1 - (1 + 0,1)^{-4}}{0,1} = 3,1699; R \cdot a_{4,10} = 10000 \cdot 3,1699 = 31699 \text{ д.е.}$$

Отсюда получим $31699 - 30000 = 1699$ д.е. Таким образом, в последний год наследник получит не 10000 д.е., а на 1699 д.е. меньше, т.е. $10000 - 1699 = 8301$ д.е.

Найдем внутреннюю норму доходности «проекта». Пусть $r = 4$ года. Тогда, решив уравнение $K = R \frac{1 - (1+i)^{-r}}{i}$, получим $i = 12,6\%$. При такой ставке процента наследник проест свое наследство за 4 года. Чистый приведенный доход $W = R \cdot a_{4,12.6} - K = 0$. Если ставка процента будет больше 12,6 %, например 13 %, то $W < 0$.

то чистый приведенный доход будет равен $W = R \cdot a_{4,13} - K = -255,3$ д.е. В инвестиционном проекте это значило бы, что проект убыточен, а в данном «перевернутом проекте» это означает, что у наследника на счету останется еще 255,3 д.е.

Задача 4. Рассчитайте ежегодный платеж за аренду оборудования стоимостью \$20 000 в течение 10 лет, если к концу аренды остаточная стоимость оборудования будет \$10 000. Норматив доходности принять равным 15 %.

Решение.

Пусть оборудование стоимостью P сдается в аренду на n лет. К концу этого срока остаточная стоимость S . Таким образом, владелец оборудования «теряет» $P - S/(1+j)^n$, где $1/(1+j)^n$ — коэффициент дисконтирования по ставке j , т.е. коэффициент приведения суммы S к расчетному периоду. Ставка j может быть отождествлена с доходностью сдачи оборудования в аренду для владельца оборудования. «Потерю» владельцу должен возместить арендатор. Современная величина потока его арендных платежей по ставке j должна быть равна $P - S/(1+j)^n$, так что размер разового годового арендного платежа R может быть определен из уравнения $R \cdot a_{n,j} = P - S/(1+j)^n$. Подставим данные, получим $R = \$3493$. Норматив доходности j должен быть больше нормы амортизации h . Разность $(j-h)$ в какой-то мере характеризует эффективность сделки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Домбровский В.В. Методы количественного анализа финансовых операций. — Томск: Изд-во ТГУ, 1998. — 104 с.
2. Малыхин В.И. Финансовая математика. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. — 247 с.
3. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова. — М.: Высшая школа, 1990. — 430 с.
4. Исследование операций в экономике / Под ред. Н.Ш. Кремера. — М.: Банки и биржи, 1977. — 407 с.
5. Фалин Г.И., Фалин А.И. Теория риска для актуариев в задачах. — М.: Мир, Научный мир, 2004. — 239 с.
6. Мицель А.А. Математическая экономика: Лабораторный практикум. — Томск: Изд-во НТЛ, 2006. — 184 с.